appunti di relatività speciale

g.longhi

a.a. 2002-2003

Indice

Capitolo 1

La graduale affermazione del principio di relatività

1.1 Il principio di relatività in meccanica e le trasformazioni di Galileo

Nella seconda metà dell'800 il successo della teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell pose il problema del suo raccordo con la meccanica di Newton. Questo problema si può sinteticamente riassumere in un problema di scelta del sistema di riferimento. Supponiamo infatti che le equazioni di Maxwell valgano in un particolare sistema di riferimento inerziale, se si trasformano in un altro sistema di riferimento inerziale, mediante una trasformazione di Galileo, la forma delle equazioni viene alterata. Cioè le equazioni <u>non sono invarianti</u> in forma e non soddisfano il principio di relatività di Galileo.

Inoltre il parametro c, cioè la velocità della luce, che compare nelle equazioni, viene alterato.

Quindi, fintanto che si assumono le trasformazioni di Galileo come legge di trasformazione, le equazioni di Maxwell valgono in un dato sistema di riferimento e solo in quello. Resta il problema di stabilire qual'è questo sistema privilegiato.

Rivediamo brevemente il concetto di sistema di riferimento inerziale.

Nella meccanica di Newton si definisce inerziale un sistema di riferimento se, rispetto ad esso, un corpo libero, cioè non soggetto a forze delle quali sia possibile rintracciare la causa, si muove di moto rettilineo uniforme. Dato però un sistema inerziale, tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo e uniforme rispetto a questo sono anch'essi inerziali. Quindi non esiste un criterio per scegliere un determinato sistema rispetto ad un altro.

Da un punto di vista sperimentale però la situazione è un pò diversa. È ovvio che il riferimento terrestre non è inerziale. Il sistema concreto che più si avvicina ad un sistema inerziale è quello astronomico, con l'origine nel centro del sole e gli assi orientati secondo le stelle fisse.

Questo è il sistema che può essere identificato con lo spazio assoluto postulato da Newton.

Consideriamo ora due sistemi inerziali S e S', ciascuno con un definito sistema cartesiano di coordinate, per cui il vettore di posizione $\vec{x}$ di un punto generico P abbia in S le coordinate (x, y, z) e il vettore di posizione $\vec{x'}$ dello stesso punto P abbia in S' le coordinate (x', y', z').

Se S' si muove rispetto ad S con velocità costante e uniforme $\vec{v}$, si ha la seguente trasformazione di Galileo:

$$\vec{x'} = \vec{x} - \vec{v}t, \tag{1.1}$$

dove $\vec{x}$ e $\vec{x'}$ individuano lo stesso punto nei due sistemi di riferimento e t è il tempo. Per semplicità nella (1.1) si è assunto che all'istante $t = 0$ le origini di S e di S' coincidano e poniamo $t' = 0$. Alla (1.1) va aggiunta

$$t' = t, \tag{1.2}$$

che completa la trasformazione di Galileo (questa impostazione in cui si cambia il riferimento mentre il sistema fisico, in questo caso il punto P, resta invariato si chiama punto di vista passivo).

Si verifica facilmente che le leggi Newtoniane del moto sono invarianti in forma sotto la trasformazione (1.1) e (1.2). Si ha infatti derivando rispetto a t la (1.1) e tenuto conto della (1.2)

$$\vec{u'} = \vec{u} - \vec{v}, \tag{1.3}$$

dove $\vec{u}$ e $\vec{u'}$ sono la velocità del punto considerato, descritto da $\vec{x}$ e $\vec{x'}$ rispettivamente.

Dalla (1.3) e dalla (1.2) segue

$$\frac{d^2\vec{x'}}{dt'^2} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}, \tag{1.4}$$

e quindi da

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}, \tag{1.5}$$

segue

$$m\frac{d^2\vec{x'}}{dt'^2} = \vec{F'}, \tag{1.6}$$

dove si è posto $\vec{F} = \vec{F'}$ e $m = m'$, poiché nella meccanica Newtoniana la massa e la forza sono quantità assolute.

Tuttavia, la legge di trasformazione delle velocità (1.3) fa si che le equazioni di Maxwell non siano invarianti, come si è già osservato.

L'equivalenza dei sistemi di riferimento inerziali viene elevata a principio: il principio di relatività stabilisce che tutti i sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti riguardo alle leggi della meccanica e che in nessun modo osservando fenomeni (di natura meccanica) in un dato riferimento sia possibile stabilire il suo moto relativo rispetto ad un altro sistema.

Ricaviamo dalle (1.2) e (1.3) la legge di trasformazione dei moduli delle velocità e dei loro angoli, che saranno utili in seguito.

Poniamo $u = |\vec{u}|$, $u' = |\vec{u'}|$ e $v = |\vec{v}|$. Scegliamo gli assi del nostro riferimento con l'asse delle x parallelo a $\vec{v}$. Ne segue

$$\begin{cases} u'_x = & u_x - v, \\ u'_y = & u_y, \\ u'_z = & u_z. \end{cases} \tag{1.7}$$

La velocità $\vec{u}$ può essere quella di un corpo materiale che effettua un moto arbitrario. Il piano formato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ad un certo istante è anche il piano in cui giace $\vec{u'} = \vec{u} - \vec{v}$. In questo piano siano θ e θ' gli angoli formati da $\vec{u}$ e $\vec{u'}$ con l'asse delle x.

Allora avremo dalla Fig.(1.1)

$$\begin{aligned} u\cos\theta - v = & \quad u'\cos\theta', \\ u\sin\theta = & \quad u'\sin\theta'. \end{aligned} \tag{1.8}$$

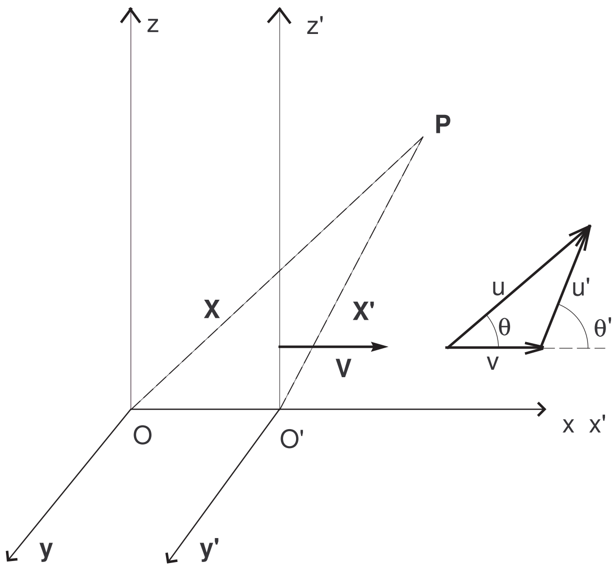

Figura 1.1: Sistemi inerziali in moto relativo e composizione delle velocità

Da queste ricaviamo: dividendo la seconda per la prima

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - \frac{v}{u}} \tag{1.9}$$

e, quadrando e sommando:

$$u' = (u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta)^{1/2},$$

o anche

$$u' = u[1 + (\frac{v}{u})^2 - 2(\frac{v}{u})\cos\theta]^{1/2}. \tag{1.10}$$

Concludendo, possiamo dire che l'invarianza della seconda legge della dinamica, sotto trasformazioni di Galileo, stabilisce la sua validità in ogni sistema di riferimento inerziale.

Abbiamo già osservato che le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazione di Galileo. Esse devono perciò valere in un determinato sitema di riferimento, che fu identificato col sistema assoluto, del quale si è parlato più sopra.

Poiché questo riferimento assoluto non può essere il riferimento terrestre, per la ben nota presenza di effetti non inerziali (forza centrifuga, forza di Coriolis), la velocità della luce misurata in un laboratorio terrestre dovrà differire dal valore di c secondo la regola (1.3), dove $\vec{v}$ sarà ora la velocità della terra rispetto al riferimento assoluto, $u = c$ e $\vec{u'}$ la velocità osservata.

Nasce quindi il problema di determinare la velocità della luce nel riferimento terrestre per verificare la (1.3) e determinare perciò il moto del riferimento terrestre rispetto al riferimento assoluto. Ciò porterebbe ad una verifica del principio di relatività della meccanica da un lato, ma anche alla verifica del principio di relatività esteso ai fenomeni elettromagnetici (detto anche principio di <u>relatività speciale</u>). Quest'ultimo principio estende il principio di relatività di Galileo a tutte le leggi della fisica, con l'esclusione della gravità.

Se sia possibile o meno determinare la velocità del laboratorio rispetto al riferimento assoluto, cioè la sua velocità assoluta, sarà stabilito solo dall'esperimento.

In effetti furono eseguiti tutta una serie di esperimenti di questo tipo, ma parleremo solo di alcuni di questi.

Prima di ciò è però necessario studiare come si trasformano le caratteristiche di un'onda piana da un sistema inerziale ad un altro.

1.2 Invarianza della fase di un'onda piana

In questa sezione (e solo in questa) adotteremo il punto di vista che le equazioni dell'elettromagnetismo siano valide in uno specifico sistema inerziale, cioè in un sistema a riposo rispetto all'<u>etere</u>. Con questo termine veniva indicata una sostanza che realizzava il concetto di spazio assoluto di Newton, nel senso che era per definizione un sistema di riferimento inerziale e era, allo stesso tempo il supporto necessario alla propagazione delle onde elettromagnetiche.

La legge di trasformazione da un sistema inerziale S ad un altro S' sarà ancora quella della relatività Galileiana.

Consideriamo ora un'onda elettromagnetica piana e monocromatica ψ, che si propaga nel vuoto nella direzione del versore $\vec{n}$ con frequenza angolare ω e lunghezza d'onda λ. Quest'onda si può scrivere

$$\psi(\vec{x}, t) = A \cos [\omega(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{c})], \tag{1.11}$$

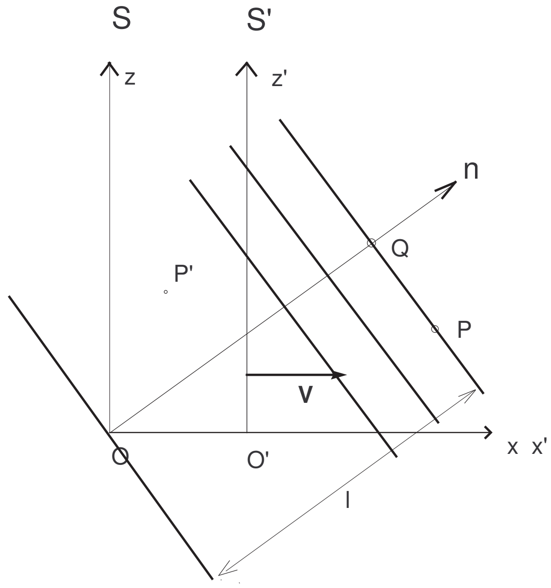

Figura 1.2: Il fronte di un'onda piana

dove

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \frac{\omega\vec{n}}{c} = \vec{k}; \quad |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \vec{n}^2 = 1, \tag{1.12}$$

e dove $\vec{k}$ è il vettore di propagazione e c è la velocità della luce, $c \approx 3\,10^{10}\frac{cm}{sec}$ (il dato più recente è $c = 2,99792458\,10^{10}\frac{cm}{sec}$) .

La fase di quest'onda è

$$F(\vec{x}, t) = \omega(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{x}}{c}). \tag{1.13}$$

Vogliamo dimostrare che F è invariante, nel senso che il suo valore numerico è lo stesso sia che si misuri in S che in S'.

Infatti, supponiamo che nel punto P (vedi la Fig.(1.2)) sia situato un osservatore e che questo osservatore conti i picchi d'onda via via che questi lo sorpassano.

Supponiamo anche che il picco d'onda che, al tempo $t = 0$, passa per l'origine sia provvisto di un segnale di riconoscimento.

Se l'osservatore in P comincia a contare i picchi d'onda a partire dal momento in cui viene sorpassato dal picco segnato, si ha che conta zero picchi dal tempo zero fino al tempo $\frac{l}{c}$ (dove l è la distanza indicata in Fig.(1.2) e $\frac{l}{c}$ è il tempo che l'onda impiega dall'origine al punto Q).

Dal tempo $\frac{l}{c}$ fino al tempo t, cioè al tempo in cui si calcola la F (1.13), l'osservatore in P conta un numero di picchi che è dato dal numero di picchi per secondo, cioè dalla frequenza ν, per il tempo trascorso; quindi

$$\nu(t - \frac{l}{c}). \tag{1.14}$$

Poiché

$$l = \vec{n} \cdot \vec{x}, \tag{1.15}$$

si ha che questo numero è la fase F.

Sia ora P' il punto che al tempo $t = t'$ coincide con P e che si muove solidalmente con S', è cioè un osservatore in S'. P' raggiunge quindi P al tempo t, ma, prima di raggiungerlo, conta il numero di picchi d'onda che lo superano (o che supera, se v è maggiore della velocità di propagazione dell'onda) e che arriveranno in P, a partire da quello segnato.

Questo è anche il numero contato da P, si ha perciò

$$\nu'(t' - \frac{l'}{c'}) = \nu(t - \frac{l}{c}), \tag{1.16}$$

cioè la fase F è invariante.

Da questa invarianza si ricavano le regole di trasformazione della frequenza e della direzione dell'onda. Infatti la (1.16) vale per qualunque t' e $\vec{x}'$. Quindi si ha, per le (1.1) e (1.2):

$$\nu'(t' - \frac{\vec{n'} \cdot \vec{x'}}{c'}) = \nu[t' - \frac{\vec{n} \cdot (\vec{x'} + \vec{v}t')}{c}], \tag{1.17}$$

e, uguagliando i coefficienti di t' e $\vec{x'}$:

$$\nu' = \nu(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}), \tag{1.18}$$

$$\nu' \frac{\vec{n}'}{c'} = \nu \frac{\vec{n}}{c}. \tag{1.19}$$

La (1.19)ci dice che i vettori $\vec{n}$ e $\vec{n}'$ sono paralleli e che, essendo vettori unitari, sono uguali

$$\vec{n}' = \vec{n}, \tag{1.20}$$

inoltre si ha che

$$\frac{\nu'}{c'} = \frac{\nu}{c}. \tag{1.21}$$

In definitiva le formule che descrivono la legge di trasformazione delle caratteristiche di un'onda e.m. sono le (1.18), (1.20) e (1.21). In particolare la (1.18) da conto dell'effetto Doppler.

1.3 L'effetto Doppler

L'equazione (1.18) rende conto dell'effetto Doppler, cioè della variazione della frequenza della radiazione elettromagnetica (e.m.) emessa da una sorgente in movimento rispetto all'osservatore. ν' è la frequenza misurata nel sistema di riferimento S' mentre ν è la frequenza, c la velocità e $\vec{n}$ la direzione della radiazione nel sistema S.

L'equazione (1.18) non può però essere usata direttamente, perchè anche la sorgente avrà un moto rispetto al riferimento assoluto. La possiamo applicare successivamente a tre sistemi di riferimento: il sistema $S_\circ$ nel quale la sorgente è a riposo, il sistema S che è l'ipotetico sistema assoluto e il sistema S' dove l'osservatore è a riposo. Le frequenze corrispondenti saranno $\nu_\circ$, ν e ν'. La velocità della radiazione sarà assegnata in S, dove per ipotesi è la velocità c.

Tenuto conto di ciò avremo che vale la (1.18) e

$$\nu_\circ = \nu(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_\circ}{c}), \tag{1.22}$$

dove $\vec{v}_\circ$ è la velocità della sorgente rispetto al riferimento assoluto.

Dalle (1.18) e (1.22) si ha

$$\nu' = \nu_\circ \frac{1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}}{1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}_\circ}{c}}, \tag{1.23}$$

dove $\vec{v}$ è la velocità dell'osservatore rispetto al riferimento assoluto.

In questa equazione non compare più la frequenza incognita ν.

Notare che $\vec{v} - \vec{v}_\circ = \vec{v}_r$ è la velocità relativa dell'osservatore rispetto alla sorgente. Questa e le frequenze $\nu_\circ$ e ν' possono essere misurate. Anche la direzione $\vec{n}$ è nota. Quindi la (1.23) può essere utilizzata per determinare la velocità assoluta $\vec{v}$.

Tuttavia sia $\vec{v}$ che $\vec{v}_\circ$ sono molto piccole rispetto alla velocità della luce (o meglio, lo erano per gli esperimenti che erano stati progettati). Se allora si sviluppa la (1.23) nei termini $\frac{\vec{v}}{c}$ e $\frac{\vec{v}_\circ}{c}$ si ha che solo i termini del primo ordine sono determinabili con l'esperimento. Tuttavia questi termini <u>non</u> dipendono dalla velocità assoluta $\vec{v}_\circ$. Infatti si ha

$$\nu' = \nu[1 - \frac{(\vec{n} \cdot \vec{v}_r)}{c} - \frac{(\vec{n} \cdot \vec{v}_\circ)(\vec{n} \cdot \vec{v}_r)}{c^2}], \tag{1.24}$$

e il termine del primo ordine dipende solo da $\vec{v}_r$.

L'effetto Doppler si può osservare nello spettro delle stelle: le linee spettrali sono spostate verso il violetto o verso il rosso, secondo che la terra, nel suo moto annuale, si muove verso la stella o se ne allontana. Tuttavia la velocità della terra, nella sua orbita attorno al sole e rispetto al sistema di riferimento astronomico (delle stelle fisse), ha una velocità di circa $3\,10^6$ cm/sec, e le stelle hanno una velocità dello stesso ordine di grandezza. Quindi si ha $v/c \cdot \approx 10^{-4}$, e i termini del secondo ordine risultavano trascurabili.

1.4 Velocità di fase, velocità di gruppo e aberrazione della luce

Ricavando c' dalla (1.21), con l'uso della (1.18), si ha

$$c' = c - (\vec{n} \cdot \vec{v}). \tag{1.25}$$

Questa equazione permetterebbe in linea di principio la determinazione dela velocità assoluta della terra v, misurando c' e data c. Queste misure furono fatte (Fizeau 1848; Foucault 1865), ma non fu rilevata alcuna influenza del moto della terra sulla velocità della luce. In altre parole la velocità della luce risultò invariata, in accordo con il principio di relatività speciale, per cui il valore di c, che compare nelle equazioni di Maxwell, non può variare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro.

Tuttavia va osservato che la (1.25) è ricavata dalle formule di trasformazione delle caratteristiche di un'onda, mentre gli esperimenti sulla velocità della luce devono essere interpretati in termini di <u>pacchetti d'onda</u>, e quindi in termini di velocità di gruppo. Poiché queste due grandezze hanno importanza di carattere generale, apriamo una parentesi per discuterli.

1.4.1 La velocità di fase e la velocità di gruppo

Sia $f(\vec{x}, t)$ un segnale e.m.. Per esempio può essere una componente del campo elettrico o magnetico. Possiamo rappresentarlo come trasformata di Fourier

$$f(\vec{x}, t) = \int A(\vec{k}) e^{-i[\omega(\vec{k})t - \vec{k}\cdot\vec{x}]} d^3\vec{k}, \tag{1.26}$$

In questa relazione ω è una funzione assegnata di $\vec{k}$, determinata dall'equazione d'onda. Questa relazione tra la frequenza angolare ω e il vettore di propagazione $\vec{k}$ si chiama relazione di dispersione. Il rapporto $\frac{\omega}{|\vec{k}|}$ è la velocità di fase v_f ed è la velocità di propagazione di quell'onda che ha come vettore di propagazione $\vec{k}$ e come lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Nel caso della propagazione della luce nel vuoto si ha $\omega = c|\vec{k}|$. Quindi, la velocità di fase è costante ed è uguale a c.

Se f rappresenta un pacchetto l'ampiezza di Fourier A è una funzione con un massimo ben definito per un determinato valore di $\vec{k} = \vec{k}_\circ$. Poniamo $\omega_\circ = \omega(\vec{k}_\circ)$.

L'esponente si può approssimare nel modo seguente

$$\begin{aligned} &\omega(\vec{k})t - \vec{k}\cdot\vec{x} = \\ &= [\omega_\circ + \vec{\nabla}\omega(\vec{k}_\circ)\cdot(\vec{k} - \vec{k}_\circ)]t - \vec{k}\cdot\vec{x} = \\ &= (\omega_\circ t - \vec{k}_\circ\cdot\vec{x}) + (\vec{k} - \vec{k}_\circ)\cdot[\vec{\nabla}\omega(\vec{k}_\circ)t - \vec{x}] \end{aligned} \tag{1.27}$$

e poniamo

$$f(\vec{x}, t) = \exp(\omega_\circ t - \vec{k}_\circ\cdot\vec{x}) M(\vec{x}, t), \tag{1.28}$$

$$M(\vec{x}, t) = \int A(\vec{k}) \exp\{-i(\vec{k} - \vec{k}_\circ)\cdot[\vec{\nabla}\omega(\vec{k}_\circ)t - \vec{x}]\} d^3k, \tag{1.29}$$

dove M è il fattore modulante, mentre l'esponenziale a fattore rappresenta l'onda portante.

La velocità di gruppo è definita dalla condizione $M(\vec{x}, t) =$ costante; ciò significa che, fissati i valori iniziali $\vec{x}_\circ$ e $t_\circ$, dopo un tempo t $\vec{x}$ dovrà essere tale da soddisfare la condizione di costanza di M, ovvero $\vec{x}$ sarà una funzione del tempo.

Da ciò segue

$$M(\vec{x}(t), t) = \text{costante},$$

da cui

$$\frac{\partial M(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial M(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} = 0, \tag{1.30}$$

dove $\dot{\vec{x}}$ è proprio la velocità di gruppo $\vec{v}_g$, cioè la velocità del segnale.

La velocità di fase e la velocità di gruppo in generale non coicidono. Nel caso di una relazione di dispersione non dispersiva, cioè quando ω è proporzionale a $|\vec{k}|$, le due velocità coincidono, altrimenti si dice che si ha dispersione.

Con la (1.30) si può calcolare $\vec{v}_g$. Se si calcolano $\frac{\partial M(\vec{x},t)}{\partial t}$ e $\frac{\partial M(\vec{x},t)}{\partial \vec{x}}$ si ha che

$$\frac{\partial M(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla}\omega(\vec{k}_\circ) \cdot \frac{\partial M(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}}, \tag{1.31}$$

e quindi la (1.30) si può scrivere

$$(\vec{v}_g - \vec{\nabla}\omega(\vec{k}_\circ)) \cdot \frac{\partial M(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} = 0. \tag{1.32}$$

Questa equazione è soddisfatta se il gradiente di M è nullo od ortogonale a $\vec{v}_g - \vec{\nabla}\omega(\vec{k}_\circ)$ o se infine è nullo il primo fattore. Le prime due condizioni implicano che il segnale non sia un pacchetto, cioè limitato spazialmente, contrariamente all'ipotesi. Infatti, nel primo caso si avrebbe M costante in $\vec{x}$ e quindi non delimitato spazialmente e nel secondo si avrebbe M costante nella direzione parallela al primo fattore e quindi ancora non delimitato spazialmente seppure solo nella direzione parallela al primo fattore. Resta perciò

$$\vec{v}_g = \vec{\nabla}\omega(\vec{k}_\circ), \tag{1.33}$$

che determina la velocità di gruppo.

1.4.2 Legge di trasformazione della velocità di gruppo

Se osserviamo un segnale e.m. in un sistema di riferimento inerziale S', in moto rettilineo e uniforme rispetto al sistema S, nel quale osserviamo lo stesso segnale $f(\vec{x}, t)$, sappiamo che le sue caratteristiche si trasformano secondo equazioni (1.18), (1.20) e (1.21). Queste valgono nel caso di un'onda e.m. e permettono di determinare la regola di trasformazione della velocità di gruppo.

Si può però dimostrare che la regola così determinata vale in generale, anche per altri tipi di onde.

Poiché nel caso e.m. il modulo del vettore di propagazione è dato da

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}, \tag{1.34}$$

e $\vec{n}$ è la sua direzione, l'equazione (1.18) si può scrivere

$$\omega' = \omega - \vec{k} \cdot \vec{v}. \tag{1.35}$$

Questa è la legge di trasformazione di ω dal sistema S al sistema S'. Tenuto conto dell'espressione per la velocità di gruppo (1.33), si ha che la velocità di gruppo in S' cioè $\vec{v}'_g$ è data da

$$\vec{v}'_g = \vec{v}_g - \vec{v}, \tag{1.36}$$

cioè la velocità di gruppo segue la stessa legge di trasformazione della velocità di una particella materiale.

Se si confronta la legge di trasformazione (1.36) con la legge di trasformazione per le velocità di fase (1.25), si vede che sono diverse, salvo il caso molto particolare in cui $\vec{v}$ e $\vec{n}$ sono paralleli.

1.4.3 L'aberrazione della luce

Tornando alla determinazione della velocità assoluta della terra, gli esperimenti fatti a questo scopo non dettero alcun risultato, pur tenendo conto che la velocità da considerare è la velocità di gruppo e non quella di fase. È però da tener presente che ciò è vero per gli effetti del primo ordine in $\frac{v}{c}$. Negli esperimenti citati (Fizeau), nei quali si misurava la velocità di un raggio di luce su di un cammino chiuso, la precisione della misura permetteva di tener conto dei soli termini del primo ordine.

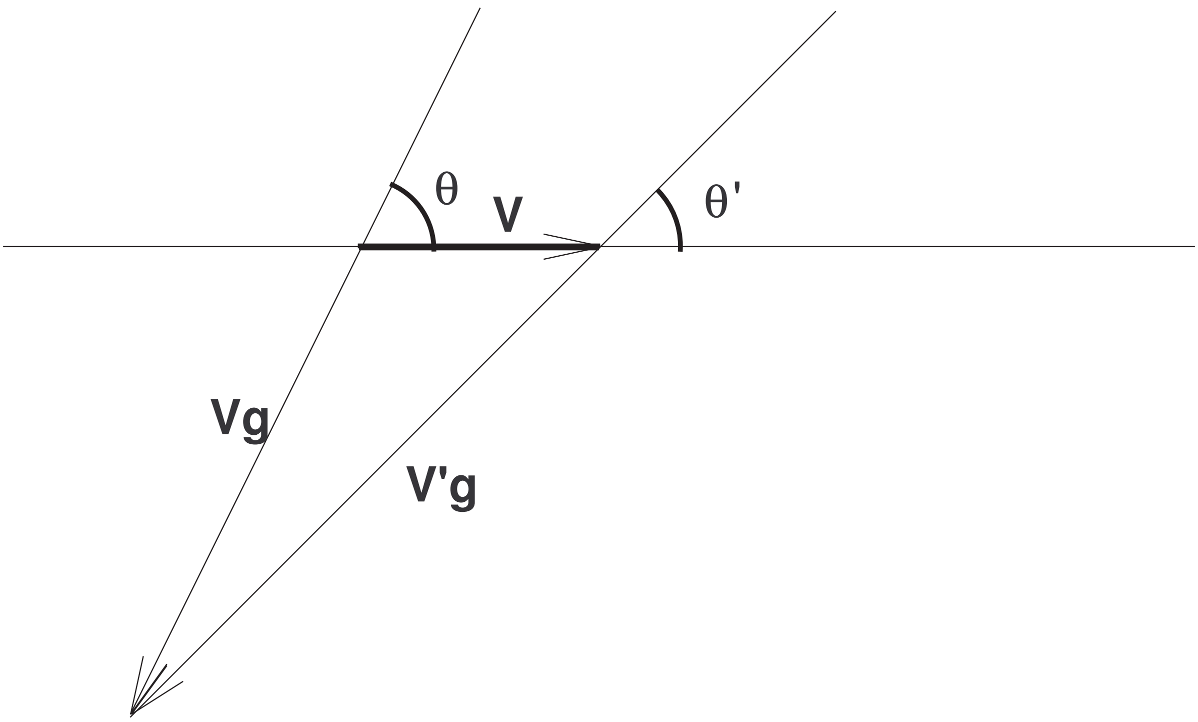

Figura 1.3: L'aberrazione stellare

Questi esperimenti furono condotti anche in presenza di un mezzo rifrattivo, con gli stessi risultati.

In conclusione, solo con esperimenti in grado di misurare termini di ordine superiore si poteva sperare di ottenere un risultato significativo, perché allora, come mostra l'equazione (1.24), si possono misurare termini che dipendono dalla velocità assoluta.

Prima di passare alla descrizione del più famoso di questi esperimenti, cioè quello di Michelson, discutiamo l'altro effetto che si può ricavare dalla legge di trasformazione di un pacchetto di radiazione e.m. (1.36), cioè la variazione della direzione di un raggio luminoso dovuta al moto della sorgente; questo effetto si chiama aberrazione della luce.

Se θ e θ' sono gli angoli tra la direzione di $\vec{v}$ con $\vec{v}_g$ $\vec{v}'_g$ rispettivamente, dalla (1.36) si ricava, tenendo conto della Fig. (1.3),

$$\begin{cases} v_g' \cos(\theta') = & v_g \cos(\theta) + v, \\ v_g' \sin(\theta') = & v_g \sin(\theta), \end{cases} \tag{1.37}$$

dalle quali, dividendo membro a membro

$$\tan(\theta') = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) + \frac{v}{v_g}}, \tag{1.38}$$

che è l'espressione per l'aberrazione della luce proveniente da un stella, dove θ' è l'angolo sotto il quale si osserva la stella dal riferimento terrestre e θ è l'angolo sotto il quale apparirebbe la stella in un riferimento assoluto. $\vec{v}$ è la velocità del riferimento terrestre rispetto allo spazio assoluto.

Questa formula è corretta al primo ordine in $\frac{v}{c}$, se con v si intende la velocità della terra rispetto al riferimento astronomico delle stelle fisse.

Osservare che la (1.38) si può ricavare dall'analoga (1.9) con la sostituzione

$$\theta \to \theta + \pi; \quad \theta' \to \theta' + \pi, \tag{1.39}$$

che è dovuta al fatto che gli angoli che si misurano sono appunto quelli indicati in Fig.(1.3), mentre gli angoli che i vettori $\vec{v}_g$ e $\vec{v}_g'$ formano con la direzione di $\vec{v}$, coerentemente con la Figura (1.1), sarebbero quelli aumentati di π nel senso positivo (antiorario).

Dalle (1.37) si può ricavare anche il modulo di $\vec{v}_g'$,. Portando v a primo membro e poi quadrando e sommando si ottiene

$$v_g'^2 + v^2 - 2vv_g' \cos(\theta') = v_g^2, \tag{1.40}$$

che, risolta in v_g' (e scegliendo il ramo opportuno) fornisce

$$v_g' = \sqrt{v_g^2 - v^2 + (v\cos(\theta'))^2} + v\cos(\theta'), \tag{1.41}$$

che si può anche riscrivere

$$v_g' = \sqrt{v_g^2 - v^2 + (\vec{v} \cdot \vec{e}')^2} - (\vec{v} \cdot \vec{e}'), \tag{1.42}$$

dove $\vec{e}'$ è il versore di $\vec{v}_g'$.

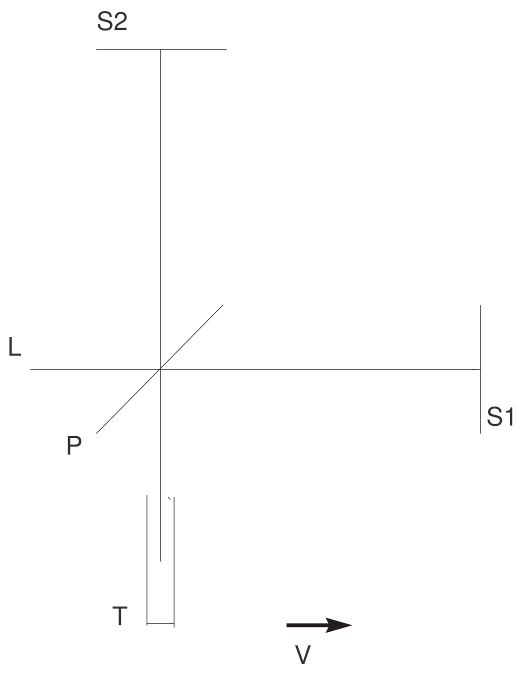

Figura 1.4: Schema dell'interferometro di Michelson

1.5 L'esperimento di Michelson

Abbiamo visto che tutti gli esperimenti citati mostrano accordo con il principio di relatività esteso ai fenomeni e.m. (indipendenza del moto del sistema rispetto al sistema assoluto). Tuttavia non avevano l'accuratezza necessaria per testare i termini del secondo ordine in v/c.

Fu Michelson (A.A.Michelson, 1881, e poi A.A.Michelson e E.W.Morley, 1887) che misurò la velocità della luce con un interferometro con una precisione che permetteva di determinare i termini del secondo ordine in v/c.

In modo estremamente schematico l'interferometro era come indicato in

Fig.(1.4).

Mediante lo specchio semitrasparente P un raggio di luce proveniente dalla sorgente L viene diviso in due parti, un raggio 1 e un raggio 2, mutuamente perpendicolari.

Il raggio 1 viene riflesso dallo specchio S_1 verso P, dove una sua parte viene riflessa ulteriormente nel telescopio T.

Il raggio 2 viene riflesso dallo specchio S_2 verso P e una sua parte attraversa P ed entra nel telescopio T, dove interferisce col raggio 1.

Anche se l'apparato fosse a riposo rispetto all'etere dovremmo osservare delle frange d'interferenza in T, a causa delle inevitabili differenza nei due bracci PS_1 e PS_2.

Supponiamo ora che l'apparato sia disposto con il braccio PS_1 parallelo alla direzione del moto della terra rispetto all'etere e siano i due bracci uguali ad l (in realtà vi sarà una piccola differenza responsabile dell'interferenza di cui abbiamo già parlato, il cui effetto sarà però eliminato come vedremo più sotto).

Per mezzo dell'equazione (1.42) con $v_g = c$ si può calcolare la differenza di fase ΔF dei raggi 1 e 2, dovuta al moto dell'apparato sperimentale nell'etere.

Applicando la (1.42) al caso del percorso PS_1, si ha che $\vec{e}'$ è parallelo a $\vec{v}$, dove $\vec{v}$ è la velocità della terra rispetto all'etere.

Quindi, per il percorso da P a S_1 si ha

$$v'_g = c - v, \tag{1.43}$$

mentre per il percorso inverso si ha

$$v'_g = c + v. \tag{1.44}$$

Quindi il tempo t_1 che il raggio 1 impiega per andare da P a S_1 e ritorno è

$$t_1 = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2l}{c(1 - \frac{v^2}{c^2})}. \tag{1.45}$$

Per il percorso PS_2 ed anche per il ritorno S_2P si ha

$$v'_g = \sqrt{c^2 - v^2}, \tag{1.46}$$

e il tempo t_2 impiegato è

$$t_2 = 2l\frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \tag{1.47}$$

Per ΔF si ha

$$\Delta F = \nu(t_1 - t_2) = \nu[\frac{2l}{c(1 - \frac{v^2}{c^2})} - \frac{2l}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}] = \frac{2l\nu}{c}\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{1.48}$$

Se si calcola ΔF al <u>secondo ordine</u>, si ha

$$\Delta F = \nu l \frac{v^2}{c^3}. \tag{1.49}$$

Se ora si ruota tutto l'apparato di 90° i due percorsi si scambiano e la differenza di fase diventa $-\Delta F$. Viceversa, la differenza di fase dovuta alla piccola differenza dei due bracci resta identica. Quindi, facendo la differenza, si ottiene $2\Delta F$ e l'effetto della differenza dei bracci si elide.

Il risultato dell'esperimento di Michelson fu che questa differenza di fase era zero, nonostante che il valore aspettato, dato dalla (1.49), fosse due ordini di grandezza superiore alla precisione dell'apparato.

Quindi si ha un risultato che indica che il principio di relatività, nella sua forma estesa, è valido almeno fino al secondo ordine in v/c.

Capitolo 2

La critica della simultaneità e la cinematica relativistica

2.1 Critica della simultaneità

L'insieme degli esperimenti sulla velocità della luce avevano determinato se non la certezza almeno la convinzione della validità del principio di relatività esteso a tutti i fenomeni (meccanici ed elettromagnetici). In particolare, se si assumono valide le equazioni di Maxwell, si ha come conseguenza la costanza del valore numerico c della velocità della luce, che compare nella forma delle equazioni. Ma questa costanza è in conflitto con il consueto concetto di velocità e della sua legge di composizione. Ne viene di conseguenza che dobbiamo rivedere questo concetto.

La misura della velocità in un dato sistema di riferimento inerziale S richiede la misura di una distanza, per esempio tra un punto A e un punto B e la misura di una differenza di tempi. Mentre la misura della distanza non pone particolari problemi, ma solo l'ipotesi di disporre di regoli calibrati a riposo nel sistema S, la misura della differenza tra il tempo t_2 di arrivo in B di una particella partita da A, della quale si vuol misurare la velocità, e il tempo t_1 di partenza da A, presenta qualche difficoltà.

Il problema è quello della sincronizzare di due orologi situati in punti diversi, in A e in B. Il metodo di inviare un segnale da A a B, in modo che se un orologio in A segna il tempo t si possa allora regolare un orologio in B al tempo di arrivo del segnale cioè al tempo $t + l/v$, dove v è la velocità del segnale di sincronizzazione e l è la distanza AB, richiede a sua volta la misura di una velocità (quella del segnale di sincronizzazione).

Si potrebbe vedere che altri metodi di sincronizzazione portano a conclusioni analoghe, per cui siamo in un circolo vizioso.

Il punto è che il concetto di simultaneità deve essere <u>definito</u>, altrimenti, come si è visto, non ha significato. La stessa conclusione si ha naturalmente per il concetto di velocità.

Il punto di partenza per definire cosa si intende per simultaneità è un insieme di fatti sperimentali sulla propagazione luminosa, tra i quali in particolare indicheremo l'esperimento di Fizeau, nel quale si misurava la velocità della luce su di un percorso chiuso, come particolarmente utile al nostro ragionamento. Il risultato dell'esperimento fu che la velocità della luce risultava c, cioè lo stesso valore della costante che compare nelle equazioni di Maxwell.

Se eleviamo questo fatto sperimentale a <u>postulato</u>, postulato della costanza della velocità della luce, allora potremo usare questo per <u>definire</u> cosa si intende per simultaneità.

Possiamo ora usare la luce come segnale per sincronizzare tutta una collezione di orologi, disposti nel riferimento inerziale S in tutti i punti nei quali si intende effettuare delle misure. Se $t_\circ$ è un istante iniziale segnato dall'orologio posto in un punto O di riferimento, origine del nostro sistema, inviando da O un segnale luminoso verso un punto arbitrario P, a distanza l da O, distanza misurata a riposo in S, regoleremo l'orologio in P al tempo $t_\circ + l/c$.

In ogni punto dove abbiamo disposto un orologio potremo sincronizzarlo con questo procedimento. Per ciò che riguarda la definizione di simultaneità avremo che due eventi, cioè due avvenimenti che si verificano in due determinati punti dello spazio e a due dati tempi, si diranno simultanei se gli orologi situati nei due punti corripondenti segnano lo stesso tempo.

Compare qui per la prima volta la parola <u>evento</u>, che esprime un concetto centrale in tutta la teoria della relatività. Il suo significato è facile da spiegare: si tratta di un fatto (un fatto fisico) che si manifesta in un determinato punto dello spazio e ad un determinato istante. Come tale precede l'eventuale descrizione che di esso ne possiamo dare. Se abbiamo scelto un sistema di riferimento e un sistema di orologi sincronizzati allora potremo assegnare all'evento una quaterna di numeri (t, x, y, z).

Tutto ciò suona molto naturale. Il punto è che, perché si possa affermare che questa è una sincronizzazione consistente, occorre dimostrare che è indipendente dalla scelta del tempo iniziale $t_\circ$ e che è anche indipendente dalla scelta del punto O di riferimento. Il procedimento di sincronizzazione dovrà poi essere ripetuto in ogni sistema di riferimento inerziale.

Sono in particolare questi ultimi due punti che richiedono il ricorso all'esperimento citato di Fizeau, e quindi è qui che si rivela il carattere particolare della luce come mezzo per trasmettere i segnali di sincronizzazione.

2.1.1 Dimostrazione della consistenza della definizione di sincronizzazione

a)-Il primo punto da dimostrare è l'indipendenza della sincronizzazione dal tempo iniziale $t_\circ$. Questo punto è sicuramente soddisfatto poichè, se si hanno due orologi sincronizzati nel punto O, se uno dei due viene spostato in un altro punto P, sotto alcune ipotesi del tutto naturali, riacquisterà lo stesso ritmo.

Va notato che non si sta affermando che il ritmo del secondo orologio resta invariato durante il trasporto, anzi si lascia aperta la possibilità che possa essere alterato in funzione della velocità, ma una volta posto nuovamente a riposo in P, non vi è nessun motivo di ritenere che non abbia nuovamente lo stesso ritmo, se nel trasporto non è stato danneggiato.

E' chiaro allora che, se si varia il tempo iniziale dell'orologio in O da $t_\circ$ a $t_\circ + \tau$, avremo che anche l'orologio in P misurerà un tempo aumentato di τ.

Quindi il primo punto è verificato.

Per ciò che riguarda il secondo punto facciamo un'osservazione preliminare.

b)-Se un segnale luminoso è inviato dal punto O al punto P e viene rimandato da P verso O, idealmente senza alcun ritardo, se il tempo iniziale di sincronizzazione, segnato dall'orologio in O è $t_\circ$, allora, facendo appello all'esperienza di Fizeau già citata, possiamo dire che il tempo impiegato per tornare in O dal raggio luminoso è

$$t_\circ + 2(l/c), \tag{2.1}$$

dove l è la distanza di P da O.

Se allora si calcola la differenza del tempo di arrivo in O e del tempo in cui il segnale era arrivato in P, si ha

$$[t_\circ + 2(l/c)] - [t_\circ + (l/c)] = l/c, \tag{2.2}$$

cioè il tempo necessario per il percorso OP è uguale a quello per il percorso inverso PO.

c)-A questo punto passiamo a dimostrare il secondo punto e cioè che la sincronizzazione è indipendente dalla scelta del punto di riferimento O. Per vedere questo consideriamo un secondo punto O', oltre ad O e P e dimostriamo che il tempo che impiega un raggio luminoso emesso da O' per raggiungere P è dato da l'/c, dove l' è la distanza tra O' e P.

Se dimostriamo questo è chiaro che potremo usare il nuovo punto O' come nuova origine, essendo P del tutto arbitrario.

Richiamando ancora una volta l'esperienza di Fizeau, avremo che il tempo di arrivo in O di un segnale luminoso emesso da O verso O', riemesso da O' verso P e poi riemesso da P verso O sarà dato da

$$t_1 = t_\circ + (l_\circ + l' + l)/c, \tag{2.3}$$

dove $l_\circ$ è la distanza tra O e O' e l' è la distanza tra O' e P.

Se t è il tempo in cui questo segnale transita dal punto P, allora si ha

$$t_1 = t + (l/c), \tag{2.4}$$

per quanto detto in (b). Poiché il tempo in cui il segnale transita per O' è dato da $t'_\circ = t_\circ + (l_\circ/c)$, eliminando t_1 dalle due equazioni (2.3), (2.4) e ricavando t si ha che

$$t - t'_\circ = t - (t_\circ + l_\circ/c) = (l'/c), \tag{2.5}$$

che è quello che si voleva dimostrare.

2.1.2 Relatività della simultaneità

Passiamo ora a considerare un secondo sistema inerziale S'. Anche in S' potremo costruire un sistema di orologi sincronizzati disposti in vari punti dello spazio come nel caso di S. Il valore della velocità della luce sarà ancora c, come sappiamo dai vari esperimenti. Questo sistema di sincronizzazione sarà consistente nel modo precedentemente discusso e per le stesse ragioni. In particolare le distanze saranno misurate mediante regoli a riposo in S'.

Così come per S anche in S' due eventi saranno considerati simultanei se gli orologi situati nelle corrispondenti posizioni segnano lo stesso tempo.

Ora, ciò che avviene è che due eventi simultanei in S non saranno piú necessariamente simultanei in S'.

Per convincersi di ciò consideriamo due eventi che si manifestano in due punti A e B, a distanza fissa in S; per esempio gli estremi di una sbarra dai quali vengono emessi due raggi luminosi verso il suo centro. Questi due eventi si diranno simultanei, relativamente a S, se i due raggi di luce emessi da A e B si incontrano nel punto di mezzo.

Questo criterio di simultaneità vale anche per S'. Ora, supponiamo che S' si muova rispetto a S con velocità v parallela alla congiungente dei due punti, ovvero alla sbarra. In S' la velocità della luce è ancora c. Quindi, il punto in S', che all'istante iniziale coincideva col punto di mezzo e che si muove solidalmente con S' con velocità v verso il punto B è il punto di mezzo per S', ma, poichè va incontro alla sorgente sarà raggiunto dal raggio emesso da B prima del raggio luminoso emesso da A. Si vede perciò che due eventi simultanei in S non lo sono piú in S'.

Si conclude che il concetto di simultaneità è relativo (al sistema di riferimento).

2.1.3 Le trasformazioni di Lorentz

Dato un sistema di riferimento Cartesiano nel sistema inerziale S, un evento sarà caratterizzato dalle coordinate cartesiane (x, y, z) del punto P in cui l'evento si manifesta e dal tempo t segnato dall'orologio situato in P, sincronizzato secondo la regola che abbiamo discusso. Analogamente, lo stesso evento, visto in S', sarà caratterizzato dalle coordinate (x', y', z') e dal tempo t'.

Ci proponiamo di determinare la relazione tra le coordinate (x, y, z, t) e quelle in S' (x', y', z', t'). Questa relazione sarà una relazione lineare, poiché un moto rettilineo uniforme in S dovrà manifestarsi come un moto rettilineo uniforme anche in S'. Infatti se un corpo è libero visto in S, e quindi si muove di moto rettilineo uniforme, lo sarà anche visto in S' (trattandosi di sistemi inerziali non ci sono problemi con forze apparenti). Quindi rette nello spazio delle quattro coordinate si devono trasformare in rette. Se oltre a ciò si fa la richiesta che la trasformazione non ammetta singolarità (valori infiniti) al finito, allora tutto ciò implica la linearità della trasformazione.

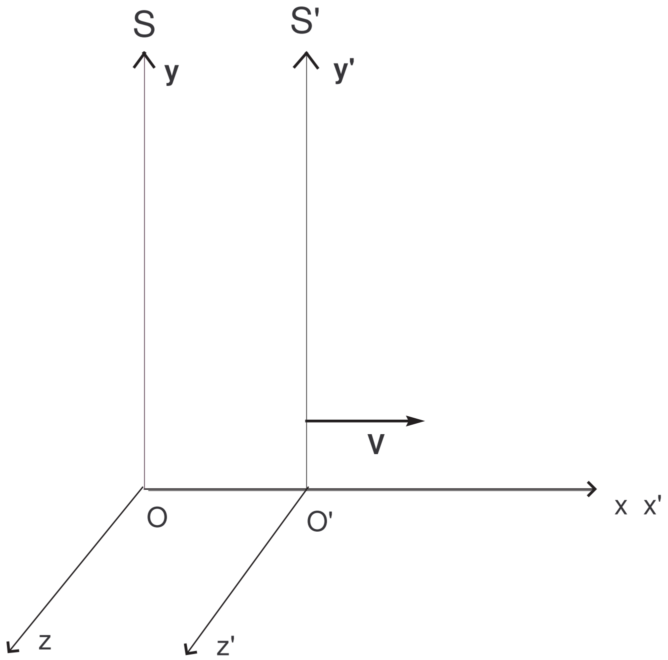

Figura 2.1:

Ora, la linearità della trasformazione implica che le rette si trasformano in rette e i piani si trasformano in piani e che quindi il nuovo sistema di assi di S' può essere scelto come indicato in figura (2.1), cioè con gli assi coordinati paralleli ai vecchi assi.

Invece di considerare un sistema S' in moto arbitrario rispetto a S, cioè con la velocità $\vec{v}$ di S' rispetto a S con direzione arbitraria, consideriamo per ora il caso particolare di una velocità diretta secondo l'asse delle x.

Data la legge di trasformazione per questo caso particolare, vedremo poi come si può ottenere il caso generale.

Per semplicità facciamo anche la scelta che quando le due origini dei due sistemi, O e O' coincidono, i corrispondenti orologi siano regolati al tempo zero $t = t' = 0$. Ciò implica che la trasformazione lineare è omogenea.

Siano allora gli assi Cartesiani dei due sistemi S e S' come nella figura (2.1).

In particolare, il piano $y = a =$ costante, parallelo al piano (x, z), si trasforma nel piano $y' = a' =$ costante. Ma si ha anche $y' = Ax + By + Cz + Dt$, per cui $A = C = D = E = 0$ e $y' = By$, dove la costante $B = a'/a$ può dipendere a priori dalla velocità v.

Se ora si invertono gli assi x e z e x' e z' si ha che le relazioni $y = a$ e $y' = a'$ restano invariate, ma i ruoli di S ed S' si scambiano, poiché ora è S che si muove con velocità $\vec{v}$ rispetto a S'. Infatti la velocità di S' rispetto a S non dipende da come si scelgono gli assi del sistema di riferimento e quindi resta invariata come direzione, con il risultato che adesso è orientata secondo l'asse negativo delle x e x'. Perciò avremo $B = a/a'$, da cui $B^2 = 1$.

Notare che qui si applica il principio di relatività, poiché si assume che misure eseguite un due sistemi inerziali, quali sono S e S', nelle stesse condizioni, diano lo stesso risultato.

E' chiaro che dovremo scegliere la soluzione $B = +1$, poiché le direzioni positive di y e y' sono le stesse.

Siamo arrivati alla conclusione

$$y = y'. \tag{2.6}$$

In modo analogo si trova

$$z = z'. \tag{2.7}$$

Quindi, le lunghezze trasverse al moto relativo dei due sistemi restano invariate.

Passando a considerare x', questa coordinata è lineare nelle vecchie coordinate, ma, siccome si annulla per $x = vt$, che è l'ascissa di O' al tempo t, misurata in S, dovremo avere

$$x' = \gamma(x - vt), \tag{2.8}$$

dove γ è una costante, che può dipendere da v. Ma lo stesso argomento si può usare per O, cioè per $x' = -vt'$ si deve avere $x = 0$, poiché $-v$ è la velocità di O misurata nel sistema S'. Quindi si ha anche

$$x = \gamma'(x' + vt'), \tag{2.9}$$

dove γ' è un'altra costante.

Possiamo adesso sfruttare l'argomento usato precedentemente, e cioè che se si invertono gli assi x e z e anche x' e z' si scambiano i ruoli di S e S', cioè è S ora che si muove con velocità v rispetto a S'.

Quindi, dalla (2.8), cambiando il segno di x e di x', si ha

$$x' = \gamma(x + vt), \tag{2.10}$$

e dovremo ottenere lo stesso risultato scambiando le coordinate del sistema S con quelle del sistema S' nella (2.9)

$$x' = \gamma'(x + vt). \tag{2.11}$$

Infatti l'inversione delle coordinate seguito dallo scambio dei ruoli di S e S' ripristina la situazione iniziale.

Da queste ultime due si ha

$$\gamma' = \gamma. \tag{2.12}$$

Allo stesso risultato saremmo arrivati scambiando le coordinate di x, t con le x', t' nella (2.8) e invertendo il segno della x e x'. Avremmo ottenuto l'equazione

$$x = \gamma(x' + vt'),$$

che insieme alla (2.9) conduce alla (2.12).

Osserviamo che γ dovrà essere positivo, poiché gli assi di x e x' sono coincidenti a $t = 0$.

La dipendenza da v di γ può essere determinata nel modo seguente. Ricordiamo che si è assunto come postulato che la velocità della luce ha lo stesso valore c in ogni sistema di riferimento inerziale. L'equazione oraria di un segnale luminoso che si propaga lungo l'asse delle x è $x = ct$ in S e $x' = ct'$ in S'. Quindi usando le (2.8) e (2.9) con $\gamma' = \gamma$ si ha

$$ct' = \gamma(ct - vt), \qquad \text{e} \qquad ct = \gamma(ct' + vt'), \tag{2.13}$$

da cui, moltiplicando le due equazioni membro a membro ed eliminando tt', si ha

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \tag{2.14}$$

dove si è scelto il segno positivo perché, come abbiamo osservato γ dev'essere una quantità positiva.

Sostituendo questa espressione di γ nella (2.8) si ha x' in termini delle coordinate di S. Per trovare t' eliminiamo x' tra la (2.8) e la (2.9), si trova

$$t' = \gamma(t - vx/c^2). \tag{2.15}$$

Riassumendo, si ha la trasformazione

$$\begin{cases} x' = & \gamma(x - vt), \\ y' = & y, \\ z' = & z, \\ t' = & \gamma(t - vx/c^2), \end{cases} \tag{2.16}$$

dove, ricordiamo

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \tag{2.17}$$

Le inverse si ottengono semplicemente scambiando v in $-v$, come del resto si può verificare facilmente

$$\begin{cases} x = & \gamma(x' + vt'), \\ y = & y, \\ z = & z, \\ t = & \gamma(t' + vx'/c^2), \end{cases} \tag{2.18}$$

Le (2.16) sono le trasformazioni di Lorentz nel caso particolare indicato dalla figura (2.1).

Dal procedimento seguito risulta chiaro che, se si ammette l'esistenza di un tipo di segnale con velocità costante in ogni riferimento, questo può essere usato al posto della luce, dando luogo ad una trasformazione della forma della (2.16), ma con questa velocità al posto di c.

Tuttavia, poiché solo un trasformazione può essere valida, cioè o la (2.16) o quest'ultima, ne segue che questo segnale dovrà propagarsi alla velocità c e ciò sarà vero per ogni tipo di segnale con queste caratteristiche (per esempio le onde gravitazionali).

Notare che in quanto precede abbiamo fatto uso del principio di costanza della velocità della luce, che in effetti deve essere formulato indipendentemente dal principio di relatività, cosí come fece Einstein. Potrebbe sembrare che il principio di relatività, che afferma l'invarianza delle equazioni di Maxwell, implichi la costanza della velocità della luce. Ma per poter parlare di invarianza delle equazioni di Maxwell occorre prima aver definito i nostri sistemi di riferimento, con le loro sincronizzazioni.

Osserviamo che per $v \to c$ la trasformazione è singolare, nel senso che il fattor γ diventa infinito. Ciò significa che un sistema di riferimento non si potrà muovere rispetto ad un altro sistema con velocità uguale o superiore a quella della luce.

Ora, un sistema di riferimento si può pensare costituito da corpi materiali, ne segue che una particella materiale non può muoversi con velocità uguale o maggiore di quella della luce, rispetto ad un qualsiasi sistema di riferimento.

Capitolo 3

Le proprietà delle trasformazioni di Lorentz

3.1 Limite non relativistico e forma generale delle trasformazioni di Lorentz

La prima proprietà che dobbiamo verificare è il limite di piccole velocità v rispetto a c, perché in questo caso la trasformazione (2.16) dovrà ridursi ad una trasformazione di Galileo. Vediamo infatti che, facendo formalmente il limite $c \to \infty$, che equivale a considerare il termine di ordine zero nello sviluppo delle formule precedenti, si ottiene

$$\begin{cases} x' = & (1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2})(x - vt) \simeq x - vt, \\ y' = & y, \\ z' = & z, \\ t' = & (1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2})(t - vx/c^2) \simeq t, \end{cases} \tag{3.1}$$

cioè la trasformazione di Galileo, come ci si aspettava.

Abbiamo ottenuto con la (2.16) un caso particolare di trasformazione di Lorentz, corrispondente alla Fig. (2.1). Si può però ottenere un caso piu' generale e cioè il caso in cui gli assi di S' sono paralleli a quelli di S, ma $\vec{v}$ è orientata in modo generico.

Basta per questo decomporre il vettore di posizione $\vec{x}'$ del punto generico P nel sistema S' in una parte parallela ed in una perpendicolare a $\vec{v}$.

Si comprende come la parte perpendicolare rimanga invariata, così come le coordinate y e z restavano invariate nella (2.16), mentre la parte parallela si tarsformerà in modo analogo alla x delle (2.16). In questo modo si ottiene la trasformazione

$$\begin{cases} \vec{x}' = & \vec{x} + \vec{v}[(\gamma - 1)\frac{(\vec{v}\cdot\vec{x})}{v^2} - \gamma t], \\ t' = & \gamma[t - \frac{(\vec{v}\cdot\vec{x})}{c^2}]. \end{cases} \tag{3.2}$$

Se poi gli assi di S' sono ruotati rispetto a S, allora occorre preventivamente ruotare gli assi di S in modo da portarli ad essere paralleli a quelli di S'. Ma questo caso non lo discuteremo.

Si può anche verificare, con un po' di calcoli, che si ha

$$c^2 t_1 t_2 - (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) - = c^2 t'_1 t'_2 - (\vec{x}'_1 \cdot \vec{x}'_2), \tag{3.3}$$

dove $\vec{x}_1$ e t_1, $\vec{x}_2$ e t_2 sono le coordinate di due eventi arbitrari.

Questa relazione è molto importante, come vedremo nel seguito, infatti si può dimostrare che le trasformazioni di Lorentz nella loro forma piú generale, che comprende anche il caso delle inversioni spaziali e dell'inversione temporale, sono le piú generali trasformazioni che lasciano invariata questa forma quadratica.

3.2 Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi

Possiamo ora ricavare alcune conseguenze della legge di trasformazione di Lorentz (2.16), che riguardano il confronto di misure effettuate nei due sistemi di riferimento S ed S'.

Considereremo le due situazioni: a) un regolo a riposo in S' disposto parallelamente all'asse delle x' e b) un orologio, opportunamente sincronizzato come già spiegato, posto a riposo in S' su di punto dell'asse delle x' con ascissa x'_1.

a) Gli estremi del regolo in S' abbiano le coordinate x'_1 e x'_2 rispettivamente. La lunghezza del regolo misurata in S' è perciò data da

$$l^\circ = x_2' - x_1'. \tag{3.4}$$

Questa la chiameremo la lunghezza a riposo o semplicemente la lunghezza del regolo.

Ponendoci in S, è naturale definire come lunghezza del regolo $l = x_2 - x_1$, dove le misure dei due estremi x_1, x_2 sono effettuate allo stesso istante $t_1 = t_2 = t$. Usando allora le (2.16), si ha

$$\begin{aligned} x_1' = &\quad \gamma(x_1 - vt), \\ x_2' = &\quad \gamma(x_2 - vt), \end{aligned} \tag{3.5}$$

(3.6)

che, risolte in x_1 e x_2, forniscono quelle che possono essere interpretate come le equazioni di moto degli estremi del regolo in S, in quanto x_1' e x_2' sono due numeri fissi:

$$\begin{aligned} x_1 = &\quad vt + \tfrac{1}{\gamma} x_1', \\ x_2 = &\quad vt + \tfrac{1}{\gamma} x_2'. \end{aligned} \tag{3.7}$$

(3.8)

Quindi la lunghezza del regolo l in S è:

$$l = x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x_2' - x_2'), \tag{3.9}$$

cioè

$$l = l^\circ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{3.10}$$

che è indipendente da t. Questa è la ben nota espressione della contrazione delle lunghezze.

E' chiaro dalla derivazione che se il regolo fosse stato perpendicolare alla velocità $\vec{v}$, la sua lunghezza sarebbe rimasta invariata. Quindi, se si considera un corpo esteso di volume V, misurato in S e di volume V° se misurato in S', avremo la seguente relazione

$$V = V^\circ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{3.11}$$

dove la contrazione del corpo avviene nella direzione del moto.

b) Supponiamo ora di avere un orologio T' posto sull'asse delle x' a distanza x'_1 dall'origine. Questo orologio, nel suo movimento solidale con S' lungo l'asse delle x va a coincidere momentaneamente con due orologi fissi in S, T_1 e T_2. Supponiamo che T' segni il tempo t'_1 quando coincide con T_1, il quale a sua volta segni il proprio tempo t_1. Quando poi T' coincide con T_2 supponiamo che segni il tempo t'_2 mentre T_2 segnerà il tempo t_2.

Le trasformazioni di Lorentz inverse (2.18) ci dicono allora quali relazioni passano tra questi tempi:

$$\begin{cases} t_1 = & \gamma(t'_1 + v x'_1/c^2), \\ t_2 = & \gamma(t'_2 + v x'_1/c^2), \end{cases} \tag{3.12}$$

dove la posizione in x'_1 è restata invariata.

Sottraendo membro a membro si ottiene

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \Delta t'. \tag{3.13}$$

La (3.13) è l'espressione della dilatazione dei tempi. Il termine a fattore è adesso invertito rispetto al caso delle lunghezze (3.10).

La (3.13) è applicabile al caso di un orologio sincronizzato come è stato discusso in sezione (2.1) in un sistema di riferimento S, che si pone in moto rispetto a questo sistema con velocità $\vec{u}$. Avremo che l'intervallo infinitesimo di tempo $d\tau$ segnato da questo orologio è legato a quello di un orologio a riposo in S dato da dt dalla relazione

$$d\tau = (1 - u^2/c^2)^{1/2} dt. \tag{3.14}$$

Si assume che questa relazione sia valida per un moto arbitrario, con $\vec{u}$ data dalla velocità istantanea dell'orologio. Quindi si assume che l'accelerazione dell'orologio relativa ad un sistema inerziale non abbia influenza sul suo ritmo.

Il tempo τ così definito si chiama tempo proprio.

Notare che, per il modo nel quale è stato definito, il tempo proprio è un invariante. Infatti si tratta di una misura eseguita in determinato sistema di riferimento, quello di riposo dell'orologio. Non ha perciò senso parlare di proprietà di trasformazione! Sarà la sua relazione con il tempo misurato da un orologio fisso in un sistema inerziale a cambiare se si cambia sistema inerziale.

3.3 La legge di composizione delle velocità

Un'altra proprietà importante delle trasformazioni di Lorentz è la legge di composizione delle velocità. Questa, nel caso particolare delle trasformazioni (2.16), si può ottenere differenziando le (2.16) stesse

$$\begin{cases} dx' &= \gamma(dx - vdt), \\ dy' &= dy, \\ dz' &= dz, \\ dt' &= \gamma(dt - \frac{vdx}{c^2}), \end{cases} \tag{3.15}$$

dalle quali, ponendo $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ e $\vec{u}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'}$, si ha subito

$$\begin{cases} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})}, \\ u'_z &= \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})}, \end{cases} \tag{3.16}$$

che si riducono a quelle Galileiane nel limite $c \to \infty$.

Notare che questa legge di composizione delle velocità non contraddice il fatto che la velocità della luce sia la velocità limite. Infatti si verifica che se si pone, per esempio, $u_x = c$ e $u_y = u_z = 0$ si ha $u'_x = c$.

In modo analogo possiamo anche ricavare l'analoga formula per la trasformazione (3.2):

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} + \vec{v}[(\gamma - 1)\frac{(\vec{v}\cdot\vec{u})}{v^2} - \gamma]}{\gamma(1 - \frac{(\vec{v}\cdot\vec{u})}{c^2})}, \tag{3.17}$$

dove

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3.18}$$

L'equazione **??** fornisce la velocità $\vec{u}'$ osservata in un riferimento inerziale S^{prime} in moto con velocità costante $\vec{v}$ rispetto al sisiema S, nel quale la velocità è $\vec{u}$. Inoltre si riduce a $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$ nel limite $c \to \infty$.

3.4 Effetto Doppler relativistico e aberrazione della luce

Per ottenere le formule relativistiche dell'effetto Doppler è necessario studiare prima la legge di trasformazione delle caratteristiche di un'onda, cioè determinare la versione relativistica delle formule (1.18), (1.20) e (1.21).

Consideriamo ancora un'onda monocromatica nel sistema inerziale S

$$\psi(\vec{x}, t) = A \cos\left[\omega(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{w})\right], \tag{3.19}$$

dove ora la velocità dell'onda w è generica e non solo quella di un'onda e.m., cioè c e valgono le (1.12) con w al posto di c.

Esattamente lo stesso ragionamento usato in sezione (1.2) dimostra l'invarianza della fase di quest'onda, dove però questa volta la trasformazione è una trasformazione di Lorentz, cioè

$$\omega'(t' - \frac{\vec{n}' \cdot \vec{x}'}{w'}) = \omega(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{w}), \tag{3.20}$$

dove le grandezze con l'apice sono misurate nel sistema S', che al solito si muove rispetto a S di moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}$.

Se si considera la trasformazione di Lorentz (2.18) e si identificano i coefficienti di x' e t', si ha

$$\omega' = \omega\gamma(1 - \frac{n_x v}{w}), \tag{3.21}$$

per ciò che riguarda i coefficienti di t' e

$$\begin{cases} \frac{\omega}{w}\gamma(n_x - \frac{vw}{c^2}) & = \frac{\omega'}{w'}n'_x, \\ \frac{\omega}{w}n_y & = \frac{\omega'}{w'}n'_y, \\ \frac{\omega}{w}n_z & = \frac{\omega'}{w'}n'_z, \end{cases} \tag{3.22}$$

per ciò che riguarda i coefficienti di x', y' e z' rispettivamente.

Tenuto conto che $\vec{v}$ è parallela all'asse delle x, la prima di queste equazioni si può riscrivere

$$\omega' = \omega\gamma(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{w}). \tag{3.23}$$

Se poi si sceglie l'asse delle y nel piano formato dall'asse delle x e $\vec{n}$ e ponendo

$$\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}, \tag{3.24}$$

si ha che le altre equazioni si riducono a

$$\begin{cases} \frac{\omega}{w}\gamma(\cos\alpha - \frac{vw}{c^2}) & = \frac{\omega'}{w'}\cos\alpha', \\ \frac{\omega}{w}\sin\alpha & = \frac{\omega'}{w'}\sin\alpha'. \end{cases} \tag{3.25}$$

Dividendo membro a membro queste due equazioni, si ha

$$\tan\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\gamma(\cos\alpha - \frac{vw}{c^2})}. \tag{3.26}$$

L'equazione (3.23) si riduce alla corrispondente equazione non relativistica (1.18) nel limite $c \to \infty$. Essa rende conto dell'effetto Doppler relativistico. Infatti, se in S' c'è un osservatore e in S una sorgente, per esempio di luce con frequenza $\nu = \omega/2\pi$, la sorgente si allontana dall'osservatore con velocità costante v. Allora l'osservatore osserva una radiazione con frequenza $\nu' = \omega'/2\pi$, data da

$$\nu' = \nu\gamma(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{w}). \tag{3.27}$$

Per quanto riguarda l'aberrazione della luce abbiamo già osservato che ciò che conta non è la velocità di fase, cioè la velocità w che compare nella (3.19), ma la velocità di gruppo. Abbiamo anche visto che la velocità di gruppo si trasforma come la velocità di una particella nel caso non relativistico. Si può dimostrare che ciò vale anche nel caso relativistico, per cui dobbiamo le equazioni (3.16) piuttosto che l'equazione (3.26).

Dalle (3.16), prendendo $\vec{u}$ e quindi $\vec{u}'$ nel piano (x, y), e chiamando con θ e θ' gli angoli che $\vec{u}$ e $\vec{u}'$ formano con l'asse delle x, si ha

$$\begin{cases} u'\cos\theta' & = \frac{u\cos\theta - v}{1 - \frac{vu\cos\theta}{c^2}}, \\ u'\sin\theta' & = \frac{u\sin\theta}{\gamma(1 - \frac{vu\cos\theta}{c^2})}, \end{cases} \tag{3.28}$$

e, dividendo membro a membro

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \frac{v}{u})}. \tag{3.29}$$

Questa formula rende conto dell'aberrazione della luce se, come nel caso della (1.38), si opera la sostituzione (1.39)

$$\theta \to \theta + \pi; \quad \theta' \to \theta' + \pi, \tag{3.30}$$

dove adesso θ e θ' sono gli angoli come in figura (1.3).

Si ottiene allora

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta + \frac{v}{u})}. \tag{3.31}$$

Si vede che questa formula differisce da quella non relativistica (1.38) per il fattore γ, cioè per termini del secondo ordine in v/c.

Capitolo 4

Meccanica relativistica

4.1 Quadriforza e dinamica relativistica.

La relazione (3.3), che vale per i due eventi $(t_1; x_1, y_1, z_1)$, $(t_2; x_2, y_2, z_2)$ vale naturalmente per l'evento generico $(t; x, y, z)$

$$c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \text{invariante.} \tag{4.1}$$

Da questa e dalla (3.3) si ricava

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] = \text{invariante.} \tag{4.2}$$

Questa forma è invariante non solo per trasformazioni di Lorentz, ma anche per traslazioni temporali e spaziali, cioè tali che

$$\vec{x} \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} + \vec{a}, \qquad t \rightarrow t' = t + a^\circ. \tag{4.3}$$

L'insieme delle trasformazioni di Lorentz (omogenee) e delle traslazioni temporali e spaziali viene chiamato gruppo di Poincaré, perchè in effetti formano un gruppo, o anche gruppo di Lorentz inomogeneo.

La (4.2) può anche essere scritta nell'infinitesimo:

$$c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \text{invariante.} \tag{4.4}$$

Notare che il tempo proprio infinitesimo $d\tau$ si può scrivere nella forma seguente

$$c d\tau = (c^2 dt^2 - d\vec{x}^2)^{1/2}, \tag{4.5}$$

che mette bene in evidenza il carattere invariante del tempo proprio.

Si può introdurre la notazione $x^\circ = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, col che

$$dx^{\circ 2} - [(dx^1)^2 + (dy^2)^2 + (dz^3)^2] = (dx^\circ)^2 - \sum_i (dx^i)^2 = \text{invariante}, \tag{4.6}$$

dove $i = 1, 2, 3$.

A questo punto conviene introdurre una metrica $\eta_{\mu\nu}$ con $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ tale che la forma invariante si scriva semplicemente

$$\sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu,\nu} dx^\mu dx^\nu = \text{invariante}, \tag{4.7}$$

dove poi si usa omettere il simbolo di sommatoria, intendendo che gli indici in alto sono sommati con indici in basso.

$$\eta_{\mu,\nu} dx^\mu dx^\nu = \text{invariante}. \tag{4.8}$$

In definitiva possiamo dire che le trasformazioni di Poincaré lasciano invariante la forma quadratica (4.8).

Si può anche dimostrare che viceversa le trasformazioni che lasciano invariante la forma quadratica (4.8) sono trasformazioni di Poincaré (aggiungendo le riflessioni spaziali e temporali) e, nel caso omogeneo, trasformazioni di Lorentz. La dimostrazione è un po' complicata e la ometteremo.

A questo punto abbiamo completamente caratterizato le trasformazioni di Lorentz (e di Poincaré) come quelle trasformazioni che lasciano invariante l'elemento di linea ds

$$ds^2 = \eta_{\mu,\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{4.9}$$

dove la metrica η ha la forma di una matrice 4x4 diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Notare che, a dispetto del fatto che nella (4.9) compare al quadrato, l'elemento ds^2 può essere negativo o nullo.

Nel caso che ds^2 sia positivo, nullo o negativo si dice che è di tipo tempo, luce o spazio rispettivamente (time-like, light-like o space-like). I corrispondenti eventi a distanza infinitesima si dicono a distanza di tipo tempo, di tipo luce o spazio rispettivamente.

Una metrica che definisce un elemento di linea, come nella (4.9), determina completamente la geometria dello spazio. Lo spazio così determinato si dice pseudoriemanniano (riemanniano se l'elemento di linea è sempre positivo).

Nel caso che si tratti del moto di una particella materiale si avrà $ds^2 > 0$, perchè si ha $ds = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2} dt}$, dove $\frac{u}{c} < 1$, cioè il tempo proprio $d\tau$ è ben definito poché la radice è reale.

Con queste notazioni, le trasformazioni di Poincaré si scrivono

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \tag{4.11}$$

dove Λ è la matrice che esprime la trasformazione di Lorentz e le a^μ sono costanti.

Nel caso della trasformazione particolare utilizzata in sezione (2.1.3), cioè nel caso di asse paralleli, ovvero in assenza di rotazione, e con la velocità del sistema S' rispetto a S parallela all'asse delle x, si ha

$$\| \Lambda^\mu{}_\nu \| = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Una grandezza che si trasforma secondo la legge (4.11) si chiama quadrivettore.

Con le notazioni della (4.11), la condizione che la trasformazione di Lorentz lasci invariante l'elemento di linea (4.9) è data da

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}, \tag{4.13}$$

che si ottiene per sostituzione della (4.11) nella (4.9), scritta per x'.

Come abbiamo detto, le trasformazioni di Lorentz lasciano invariate le equazioni di Maxwell, per cui queste ultime soddisfano al principio di relatività di Einstein. La contropartita è che le equazioni della dinamica di Newton non soddisfano più il principio di relatività, se non nel limite di velocità piccole rispetto alla velocità della luce. Possiamo allora modificare queste ultime in modo che lo soddisfino.

Supponiamo che una particella materiale si muova in un campo di forze a velocità relativistica, per cui non sia possibile applicare ad essa la seconda legge della dinamica. Supponiamo però di saper calcolare la forza in un riferimento in cui la particella sia momentaneamente ferma. Possiamo allora effetuare una trasformazione di Lorentz in modo da portarci in tale riferimento e determinare così il moto della particella. L'idea è cioè quella di utilizzare le trasformazioni di Lorentz per porci in una situazione in possiamo applicare la dinamica di Newton. Ora noi sappiamo come si trasformano le velocità e da ciò possiamo determinare la legge di trasformazione dell'accelerazione. Vediamo subito però che questa legge sarà alquanto complicata (basta dare uno sguardo alle (3.16) per rendersene conto.

Allo scopo di semplificare la trattazione, possiamo sfruttare il fatto che il tempo proprio $d\tau$ è un invariante e che si riduce a dt se la particella è a riposo.

Allora, invece di studiare il comportamento sotto trasformazione di Lorentz dell'accelerazione possiamo studiare la grandezza

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}, \tag{4.14}$$

che, data appunto l'invarianza di $d\tau$, si trasforma come x^μ; è cioè un quadrivettore

$$\frac{d^2x'^\mu}{d\tau^2} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}, \tag{4.15}$$

essendo Λ costante in τ.

Poniamo allora

$$f^\mu = m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}, \tag{4.16}$$

dove f è la forza relativistica, che, per quanto detto sopra, si trasforma secondo la legge

$$f'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} f^{\nu}, \tag{4.17}$$

cioè f è un quadrivettore.

Ora la f^{μ} si può calcolare osservando che, se la particella è momentaneamente ferma, l'intervallo di tempo proprio $d\tau$ coincide con dt. Ne segue che, poichè $x^{\circ} = ct$, la sua derivata seconda rispetto a t è nulla e quindi, dalla (4.16) con $\mu = 0$, si ha

$$f^{\circ} = 0, \tag{4.18}$$

inoltre

$$f^{i} = m\frac{d^2x^i}{dt^2}, \tag{4.19}$$

per cui $\vec{f} = \vec{F}$, cioè $\vec{f}$ è la forza di Newton.

Se ora la particella ha velocità $\vec{v}$ invece che zero, basterà effettuare una trasformazione di Lorentz tale che, nel nuovo riferimento, la particella abbia velocità $\vec{v}$. Evidentemente questo riferimento dovrà avere velocità $-\vec{v}$ rispetto a quello in cui la particella è a riposo. Se indichiamo con $\Lambda(\vec{v})$ questa trasformazione, avremo che la f^{μ} sarà data da

$$f^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} F^{\nu}, \tag{4.20}$$

dove ricordiamo che $F^{\circ} = 0$.

Possiamo leggere la $\Lambda(\vec{v})$ dalle (3.2) (con la seconda di queste equazioni scritta per $x^{\circ} = ct$, ponendo le componenti di f^{μ} al posto di quelle di $\vec{x}'$ e ct' e quelle di F^{ν} al posto di quelle di $\vec{x}$ e ct. Inoltre andrà posto $\vec{v} \to -\vec{v}$. In questo modo si ottiene

$$\begin{cases} \vec{f} = & \vec{F} + \vec{v}[(\gamma - 1)\frac{(\vec{v}\cdot\vec{F})}{v^2} + \frac{1}{c}\gamma F^{\circ}], \\ f^{\circ} = & \gamma[F^{\circ} + \frac{(\vec{v}\cdot\vec{F})}{c}], \end{cases} \tag{4.21}$$

dove però $F^{\circ} = 0$. In definitiva, tenendo conto che dalla prima di queste equazioni segue

$$\vec{v} \cdot \vec{f} = \gamma(\vec{v} \cdot \vec{F}),$$

si ha

$$\begin{cases} \vec{f} = & \vec{F} + \vec{v}(\gamma - 1)\frac{(\vec{v}\cdot\vec{F})}{v^2}, \\ f^\circ = & \gamma\frac{(\vec{v}\cdot\vec{F})}{c} = \frac{(\vec{v}\cdot\vec{f})}{c}. \end{cases} \tag{4.22}$$

Inserendo queste espressioni nella (4.16) si ha la generalizzazone della seconda legge della dinamica di Newton, espressa come un sistema di equazioni differenziali in τ. Se si risolvono e si determinano le x^μ in termini di τ, si può poi eliminare τ a favore di t e ottenere le consuete equazioni orarie per $\vec{x}$. Va però tenuto conto della definizione di τ, cioè della (4.5), che ci dice che τ non è una variabile indipendente. Osserviamo però che se si soddisfa la (4.5) all'istante iniziale, poichè la sua derivata in τ è, come ora verificheremo, nulla, allora questa condizione sarà sempre soddisfatta.

Verifichiamo che la derivata in τ della (4.5) è zero. Riscriviamo la (4.5) nella forma

$$cd\tau = [\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu]^{1/2}, \tag{4.23}$$

e ancora, quadrando

$$c^2 = \eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}. \tag{4.24}$$

Se ora si deriva in τ

$$0 = 2\eta_{\mu\nu}f^\mu\frac{dx^\nu}{d\tau}. \tag{4.25}$$

Come abbiamo detto, se questa espressione è zero indipendentemente allora, se la (4.24) è soddisfatta inizialmente, lo è sempre. Ora si verifica esplicitamente che l'espressione a secondo mebro della (4.25) è zero.

Si ha infatti

$$\eta_{\mu\nu}f^\mu\frac{dx^\nu}{d\tau} = \eta_{00}f^\circ\frac{dx^\circ}{d\tau} + \eta_{ii}f^i\frac{dx^i}{d\tau} = f^\circ\frac{dct}{d\tau} - f^i\frac{dx^i}{d\tau},$$

e, tenendo conto della relazione tra τ e t (3.14), che implica

$$\frac{d}{d\tau} = \gamma\frac{d}{dt}, \tag{4.26}$$

e, usando la (4.22), si ottiene la (4.25).

Abbiamo visto che, nella forma (4.16), la seconda legge della dinamica si trasforma da un riferimento inerziale ad un altro con la legge

$$\Lambda_{\mu\nu} f^\nu = m\Lambda_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}, \qquad (4.27)$$

dove Λ è la trasformazione di Lorentz che trasforma le coordinate di un riferimento in quelle di un altro, vedi le (4.11).

La legge (4.16) garantisce che la stessa forma della seconda legge della dinamica valga anche nel nuovo riferimento. L'utilità del formalismo vettoriale (quadri-vettoriale) risiede principalmente in questo fatto.

Si usa definire una forza $\vec{f}_N$ con

$$\vec{f} = \gamma \vec{f}_N, \qquad (4.28)$$

e $\vec{f}$ viene chiamata forza di Minkowski.

In termini di $\vec{f}_N$ si ha

$$f^\mu = (\frac{\gamma}{c}(\vec{v}\cdot\vec{f}_N), \gamma\vec{f}_N), \qquad (4.29)$$

e, tenuto conto della (4.26), l'equazione di moto si scrive (vedi più sotto)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}_N. \qquad (4.30)$$

In pratica si può usare quest'ultima equazione come equazione del moto. Per esempio, nel caso del moto uniformemente accelerato, si potrà porre $\vec{f} = m\vec{g}$, dove g è l'accelerazione.

4.2 Impulso ed energia

La forma (4.16) della seconda legge di Newton suggerisce la seguente definizione dell'impulso

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}, \qquad (4.31)$$

in modo che la seconda legge si potrà scrivere

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu, \qquad (4.32)$$

che conserva un'analogia con la forma di Newton. Notare che anche p^μ è un quadrivettore.

Se si tien conto di

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} dt,$$

si ha subito

$$\begin{cases} \vec{p} &= m\gamma\vec{v}, \\ p^\circ &= mc\gamma. \end{cases} \tag{4.33}$$

Per piccole velocità si ha

$$\begin{cases} \vec{p} &= m\vec{v}(1 + O(\frac{v^2}{c^2})), \\ cp^\circ &= mc^2 + \frac{m}{2}\vec{v}^2 + O(\frac{v^4}{c^2}). \end{cases} \tag{4.34}$$

Nella seconda equazione riconosciamo l'espressione dell'energia di una particella libera di massa m. In relatività si definisce

$$E = cp^\circ = mc^2\gamma, \tag{4.35}$$

come l'energia della particella, che comprende l'energia di riposo mc^2.

La grandezza

$$T = E - mc^2 \tag{4.36}$$

viene chiamata energia cinetica. Infatti, al primo ordine in v^2/c^2 è data da

$$T = m/2v^2, \tag{4.37}$$

come si vede dalla (4.34).

Se si elimina la velocità dalle equazioni (4.33) si trova

$$E = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}, \tag{4.38}$$

che è la forma relativistica dell'energia in funzione dell'impulso. Questa può anche essere ottenuta dalla (4.31) e dalla (4.24), cioè

$$p^\mu p^\nu \eta_{\mu\nu} = m^2c^2, \tag{4.39}$$

che equivale alla (4.38) se si prende il ramo positivo della radice.

Il caso di un raggio di luce si può inquadrare nello schema sviluppato, con delle modifiche importanti. Infatti, per un raggio di luce, si ha che l'elemento di linea (4.9) è zero

$$ds^2 = c^2(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}) = 0, \tag{4.40}$$

e quindi anche il tempo proprio (4.5).

L'espressione dell'impulso (4.31) avrà allora senso solo se si fa tendere la massa a zero, cioè, dalla (4.39)

$$(p^\circ)^2 - (\vec{p})^2 = 0. \tag{4.41}$$

E' però con la meccanica quantistica che si da un significato preciso alla nozione di particella con massa zero nel caso della luce.

Consideriamo adesso n particelle che subiscono un processo tale che sia conservato l'impulso totale $\vec{P}$ dato dalla somma degli impulsi delle particelle:

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}^{(f)} - \vec{P}^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \vec{p}_k^{(f)} - \sum_{k=1}^{n} \vec{p}_k^{(i)} = 0, \tag{4.42}$$

dove k numera le particelle, $\vec{p}_k^{(i)}$ sono gli impulsi iniziali e $\vec{p}_k^{(f)}$ sono gli impulsi finali. Notare che il numero di particelle finali potrà essere in generale diverso da quello iniziale, se vi sono processi di annichilazione o creazione di particelle.

Questa conservazione dell'impulso implica la conservazione delle energie.

Infatti, osserviamo innazitutto che, se l'impulso totale è conservato in un riferimento, lo è anche in un'altro riferimento, poichè la conservazione dipende solo dal fatto che il sistema è isolato e non dal riferimento in cui ciò si esprime.

Se ora indichiamo con un apice le stesse quantità determinate in un altro riferimento inerziale, avremo

$$\Delta P'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \Delta P^{\nu}. \tag{4.43}$$

Ma per $\nu = 1, 2, 3$, tenuto conto della (4.42), si ha

$$\Delta P'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{0} \Delta P^{\circ}, \tag{4.44}$$

e, per $\mu = 1, 2, 3$ il primo membro è zero, perché, come abbiamo osservato, la conservazione dell'impulso si ha anche nel nuovo riferimento.

Quindi

$$0 = \Lambda^i_0 \Delta P^\circ, \tag{4.45}$$

da cui $\Delta P^\circ = 0$, perchè quanto sopra vale per una trasformazione di Lorentz arbitraria. Questo dimostra che la conservazione dell'impulso implica quella dell'energia.

Quanto detto va sotto il nome di conservazione del quadrimpulso:

$$P^{(f)\mu} = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(f)\mu} = P^{(i)\mu} = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(i)\mu}. \tag{4.46}$$

Questa legge di conservazione giustifica il nome di energia dato alla grandezza E in (4.35), pochè è una quantità conservata che si riduce all'energia classica nel limite non relativistico, salvo l'aggiunta dell'energia di riposo.

Quanto alle proprietà di trasformazione queste si ricavano immediatamente dalla (4.31). Nel caso della trasformazione di Lorentz (2.16) si ha (tenuto conto dei fattori c)

$$\begin{cases} p'_x = & \gamma(p_x - vE/c^2), \\ p'_y = & p_y, \\ p'_z = & p_z, \\ E' = & \gamma(E - vp_x), \end{cases} \tag{4.47}$$

mentre nel caso di un trasformazione con $\vec{v}$ generica, ma senza rotazione degli assi, si ha come in (3.2)

$$\begin{cases} \vec{p}' = & \vec{p} + \vec{v}[(\gamma - 1)\frac{(\vec{v}\cdot\vec{p})}{v^2} - \gamma E/c^2], \\ E' = & \gamma[E - (\vec{v}\cdot\vec{p})]. \end{cases} \tag{4.48}$$

4.3 Sistema del centro di massa ed equivalenza massa-energia

Consideriamo ancora un sistema di n particelle libere. Se $(\vec{P}, E)$ e $(\vec{P}', E')$ sono l'impulso totale e l'energia totale del sistema in due sistemi di riferimento inerziali S e S'; la loro relazione è data dalle equazioni (4.47) e (4.48).

L'invariante (4.39) per questo sistema assume la forma

$$E^2 - c^2\vec{P}^2 = (\sum_{i=1}^{n} E_i)^2 - c^2(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i)^2 = \tag{4.49}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} c\sqrt{\vec{p}_i^2 + m_i^2 c^2}\right)^2 - c^2(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i)^2 =$$
$$= c^2 \sum_{i,j=1}^{n} [\sqrt{\vec{p}_i^2 + m_i^2 c^2}\sqrt{\vec{p}_j^2 + m_j^2 c^2} - \sum_{i,j=1}^{n} \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j].$$

Il valore minimo di questa espressione è

$$c^4 \sum_{i=1}^{n} m_i^2, \quad \text{per} \quad n > 1,$$

che è positivo. Quindi l'invariante (4.39) è definito positivo.

Il fatto che sia positivo ci permette di determinare un sistema di riferimento particolare tale che $\vec{P}$ sia zero. Infatti, dalla legge di trasformazione inversa della(4.48) per $\vec{P}$, si vede che ciò è possibile con una velocità relativa di S' rispetto a S data da

$$\vec{v} = \frac{c^2\vec{P}}{E}; \tag{4.50}$$

infatti, ponendo $\vec{P'} = 0$, si ha

$$\vec{v} = \frac{c^2\vec{P}}{\gamma E'},$$

dove per E' possiamo usare l'inversa della seconda equazione (4.48), $E = \gamma E'$, ottenendo la (4.50).

Il fatto che si possano applicare le formule (4.48) all'impulso totale e all'energia totale risulta chiaro se si tien conto che la matrice Λ di trasformazione di Lorentz non dipende dall'indice di particella e quindi può essere posto a fattore comune della sommatoria sull'indice di particella.

Il fatto che l'invariante (4.39) sia positivo ci permette anche di affermare che questa velocità è minore di c. Infatti da $E^2 - c^2\vec{P}^2 > 0$ segue che $E > c|\vec{P}|$ e dalla (4.50) si ha che $v/c < 1$.

Quindi questo sistema di riferimento esiste sempre per un sistema di particelle (con massa). E' il sistema del centro di massa del sistema.

Indichiamo con S° il sistema del centro di massa e con S un sistema di riferimento generico. Allora, indicando con $\vec{u}$ la velocità di S°, identificato con S', rispetto a S e applicando le formule (4.48) con $\vec{v} = -\vec{u}$, si trova

$$\begin{cases} \vec{P} &= \gamma \frac{\vec{u}E^\circ}{c^2}, \\ E &= \gamma E^\circ, \end{cases} \tag{4.51}$$

dove $\vec{P}$ e E sono l'impulso e l'energia nel sistema S e $\vec{P}^\circ = 0$ e E° l'impulso e l'energia nel sistema S° del centro di massa. Il fattore γ è naturalmente in termini della velocità $\vec{u}$.

Abbiamo quindi mostrato che il sistema delle n particelle come insieme si comporta come un'unica particella di impulso $\vec{P}$ e di energia E, che si trasformano come l'impulso e l'energia di una singola particella.

Se si confrontano le (4.51) con le analoghe per una particella con massa m, cioè le (4.33), si vede che è naturale definire la massa totale del sistema di particelle M come il rapporto tra il modulo dell'impulso e la velocità

$$M = \gamma \frac{E^\circ}{c^2} = \frac{E}{c^2} = \gamma M^\circ, \tag{4.52}$$

dove con M° abbiamo indicato E°/c^2.

Notare che M° è maggiore della somma delle masse delle singole particelle, infatti per E° abbiamo

$$E^\circ = \sum_{i=1}^{n} E^{i\circ} = \sum_{i=1}^{n} c\sqrt{m_i^2 c^2 + \vec{p}_i^{\circ 2}} \geq c^2 \sum_{i=1}^{n} m_i, \tag{4.53}$$

da cui

$$M^\circ = \frac{E^\circ}{c^2} \geq \sum_{i=1}^{n} m_i. \tag{4.54}$$

In questa equazione il segno di uguale si ha solo se tutte le particelle hanno impulso zero, cioè nel caso statico.

Con la definizione (4.52) le (4.51) si scrivono

$$\begin{cases} \vec{P} &= \gamma M^\circ \vec{u}, \\ E &= \gamma M^\circ c^2. \end{cases} \tag{4.55}$$

L'energia totale del sistema si potrà definire con l'equazione

$$M^\circ = E^\circ/c^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i + T^\circ/c^2, \tag{4.56}$$

dove T° è l'energia cinetica nel sistema del centro di massa.

Dalla (4.56) segue un'importante conclusione e cioè che l'energia interna del sistema contribuisce alla massa totale del sistema (salvo il caso particolare statico).

Abbiamo visto ciò nel caso di un sistema di particelle libere, in cui l'energia interna è data solo dall'energia cinetica. Ma questa conclusione si può ottenere per ogni processo fisico, si può cioè dimostrare che: <u>ad ogni quantità di energia</u> ΔE <u>corrisponde una massa</u>

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}. \tag{4.57}$$

Non daremo qui la dimostrazione di questo risultato, la dimostrazione si può trovare in [1], pagg.78-82, e una discussione nei suoi aspetti sperimentali in [2], pagg.220-236.

4.4 Difetto di massa

Una applicazione particolarmente significativa dell'equivalenza massa-energia è data dal <u>difetto di massa</u> dei nuclei atomici. Infatti, da quanto detto nella sezione (4.3), ci possiamo aspettare che la massa di un nucleo atomico nel suo stato fondamentale sia sempre minore della somma delle masse dei nucleoni che lo costituiscono in modo tale che, per separare i costituenti, sia necessario fornire energia, ovvero massa, al nucleo.

Il difetto di massa si definisce allora come la differenza tra la somma delle masse dei costituenti del nucleo e la massa nucleare effettiva, cioè

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_{Z,A}, \tag{4.58}$$

dove m_p è la massa del protone, m_n quella del nautrone, $M_{Z,A}$ è la massa effettiva del nucleo, Z è il numero atomico, ciò il numero di protoni del nucleo e A è il numero atomico, cioè il numero totale di protoni e neutroni.

A approssima il peso del nucleo in unità di massa atomiche (u.m.a.), con la massa del C^{12} fissata esattamente a 12 u.m.a..

Ci aspettiamo che questo difetto di massa sia tanto più grande quanto più il nucleo è stabile. Ad esso corrisponde un'energia secondo la relazione (4.57) che può essere interpretata come un'<u>energia di legame</u> (negativa). In altre parole, per decomporre un nucleo nei suoi costituenti occorrerà fornirgli un'energia almeno uguale all'energia di legame

$$\Delta E = \Delta mc^2, \tag{4.59}$$

dove Δm è il difetto di massa.

L'equazione (4.58) fornisce un'energia di legame, che, misurata in MeV (1 Mev= 10^6 eV, dove un elettronvolt (eV) è dato dall'energia che un elettrone acquista passando attraverso la differenza di potenziale di 1 volt, ed è uguale a $1,602...10^{-12}$ erg) è data da

$$\Delta E(\mathrm{MeV}) = 931,494[Z \cdot 1,0078250 + (A - Z) \cdot 1,008665 - M_{Z,A}]. \tag{4.60}$$

In questa formula il numero a fattore è il fattore di conversione da unità di massa atomiche a MeV.

Com'è noto, sia i processi di fusione nucleare, nei quali nuclei leggeri si fondono in un nucleo più pesante, che di fissione nucleare, nei quali un nucleo si rompe in frammenti, sono basati sul difetto di massa. Questo è possibile perchè si può vedere sperimentalmente che nei due casi indicati i processi vanno nel senso che il difetto di massa del nucleo o dei nuclei iniziali è <u>minore</u> di quello del nucleo o dei nuclei finali.

Per rendere chiaro l'argomento consideriamo per esempio la reazione nucleare

$${}_1^1H +_3^6 Li \rightarrow_2^3 He +_2^4 He, \tag{4.61}$$

dove il primo termine della reazione è un protone, il secondo un isotopo del Litio, che ha l'isotopo più abbondante con numero atomico 7, e l'Elio-3 che è anch'esso un isotopo della forma usuale Elio-4.

Le masse di questi elementi espresse in unità di massa atomica (u.m.a.) sono

$$
\begin{array}{llll}
\text{massa} & \text{del} & {}^1_1H & = 1,0078250, \\
'' & '' & {}^6_3Li & = 6,0151223, \\
'' & '' & {}^3_2He & = 3,0160293, \\
'' & '' & {}^4_2He & = 4,0026032.
\end{array}
\tag{4.62}
$$

N.b. Queste sono masse atomiche, che comprendono le masse degli elettroni. Però nel calcolo del difetto di massa ciò non influisce, poichè il loro contributo si elide tra primo e secondo termine della reazione. I dati sono ripresi da http://www2.bnl.gov/ton/ .

Se si calcolano i difetti di massa si ha

$$
\begin{array}{rcl}
\Delta m_{{}^1_1H} & = & 0, \\
\Delta m_{{}^6_3Li} & = & 0,0343474 \quad \text{u.m.a.} \simeq 32 \quad \text{MeV}, \\
\Delta m_{{}^3_2He} & = & 0,0082856 \quad \text{u.m.a.} \simeq 7,72 \quad \text{MeV}, \\
\Delta m_{{}^4_2He} & = & 0,0303766 \quad \text{u.m.a.} \simeq 28,3 \quad \text{MeV},
\end{array}
\tag{4.63}
$$

da cui si ha il difetto di massa complessivo

$$
\Delta m_H + \Delta m_{Li} - \Delta m_{{}^3He} - \Delta m_{{}^4He} = -0,0043148\,\text{u.m.a.}, \tag{4.64}
$$

che è negativo e quindi la reazione avviene con produzione di energia.

Lo stesso risultato si ottiene facendo il bilancio delle masse, poiché le masse dei costituenti si elidono nella differenza tra il contributo del primo membro della reazione e il secondo. Il risultato sarà con il segno opposto:

$$
m_H + m_{Li} - m_{{}^3He} - m_{{}^4He} = +0,0043148 \quad \text{u.m.a.} \simeq 4,02 \quad \text{MeV}. \tag{4.65}
$$

Nel grafico (4.1) è riportata l'energia di legame media per nucleone (cioè il difetto di massa diviso il numero dei nucleoni) in funzione del numero atomico. (L'immagine è ripresa da : cnx.prenhall.com/petrucci/medialib/media portfolio/26.html)

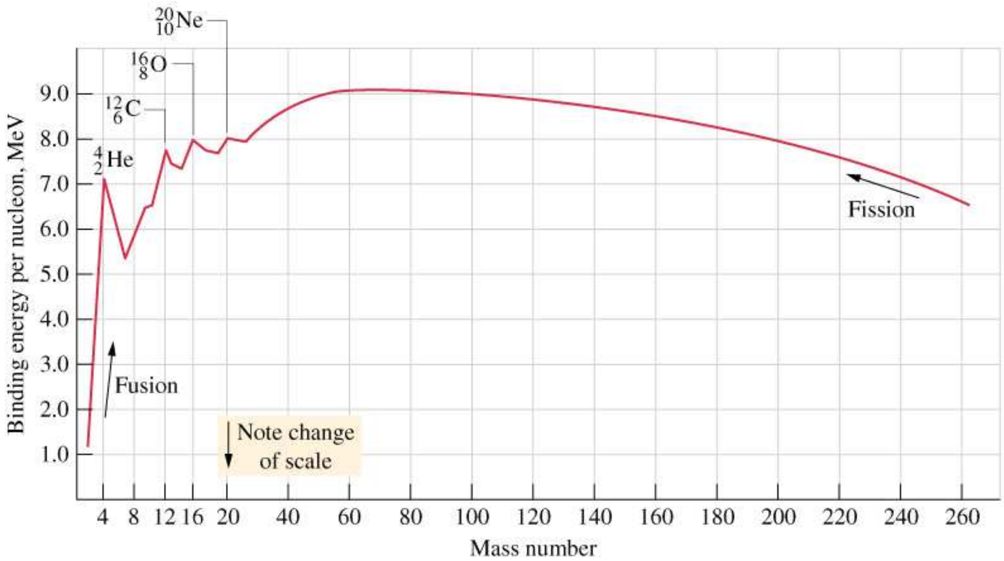

Figura 4.1: L'energia di legame media

Capitolo 5

Elettrodinamica nel vuoto.

5.1 La corrente e la densità elettromagnetiche

Consideriamo un sistema di N particelle materiali puntiformi. L'ennesima particella abbia posizione $x_n(t)$ in un dato sistema inerziale e carica e_n.

La densità di corrente $\vec{J}(\vec{x},t)$ e di carica $\rho(\vec{x},t)$ sono date da

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{x},t) &= \textstyle\sum_n e_n \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_n(t))\frac{d\vec{x}_n(t)}{dt}, && (5.1)\\ \rho(\vec{x},t) &= \textstyle\sum_n e_n \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_n(t)). && (5.2)\\ & && (5.3) \end{aligned}$$

Che queste siano le espressioni corrette si comprende tenendo presente che per una singola particella si ha $\vec{J}=\rho\vec{v}$. Inoltre la carica totale si ottiene integrando sul volume dove sono presenti le cariche la densità

$$e = \int \rho(\vec{x},t) d^3x = \sum_n e_n. \tag{5.4}$$

Questa carica somma delle cariche elettriche delle particelle è invariante sotto trasformazione di Lorentz. Questo può essere preso come un risultato sperimentale. Per una discussione su questo punto vedi J.D.Jackson, Classical Electrodynamics, 3 ed. 1998, pagg. 553-554.

Poniamo le due grandezze in una forma quadrivettoriale con

$$j^\circ \equiv \rho, \quad \vec{j} = \frac{\vec{J}}{c}, \tag{5.5}$$

e si vede che

$$j^\mu(x) = \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^\mu(t)}{cdt}, \tag{5.6}$$

poiché, per $\mu = 0$, la derivata a secondo membro è c, essendo $x_n^\circ(t) = ct$.

Possiamo ora sostituire la (5.6) con

$$j^\mu(x) = \int dt' \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(t')) \frac{dx_n^\mu(t')}{dt'}, \tag{5.7}$$

dove l'argomento della δ^4 è $x^\mu - x^\mu(t')$ che, per $\mu = 0$, è $c(t - t')$.

Il differenziale dt', che si cancella, può essere sostituito da un a misura invariante $d\tau$ (può essere per esempio il tempo proprio delle singole particelle, nel qual caso l'integrale va posto dopo il simbolo di somma). Quindi

$$j^\mu(x) = \int d\tau \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(t')) \frac{dx_n^\mu(t')}{d\tau}. \tag{5.8}$$

Ora $\delta^4(x - x_n(t'))$ è uno scalare, ovvero invariante. Infatti sotto trasformazione di Lorentz prende un fattore dato dal determinante della trasformazione, che è 1.

Che il determinante di una trasformazione di Lorentz sia 1 si può vedere dalla (4.13) prendendone il determinante. Poichè il determinante di un prodotto è uguale al prodotto dei determinanti, il determinante di η essendo uguale a -1, si ha che il quadrato del determinante di Λ è 1. Se si considerano trasformazioni proprie, cioè che non comprendono inversioni spaziali o temporali, si ha che $det(\Lambda) = 1$.

Abbiamo visto che $dx^\mu/d\tau$ è un quadrivettore e e_n sono invarianti. Si può allora concludere che j^μ è un quadrivettore.

Si verifica facilmente che vale

$$\frac{\partial j^\mu(x)}{\partial x^\mu} = 0, \tag{5.9}$$

che è l'equazione di continuità della corrente e.m. in forma quadrivettoriale. Si ha infatti

$$\nabla \cdot \vec{J} = \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^i(t)}{dt}, \tag{5.10}$$

e la derivata rispetto a x^i si può cambiare in derivata rispetto a $x_n(t)$. Si riconosce così una derivata totale rispetto a t:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \sum_n e_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t). \tag{5.11}$$

La carica totale si ottiene integrando la componente temporale di j^μ

$$Q = \frac{1}{c} \int d^3x J^\circ(x), \tag{5.12}$$

che è costante nel tempo. Infatti si ha

$$\frac{d}{dt} Q = \int d^3x \frac{\partial J^\circ(x)}{\partial t} = -\int d^3x \frac{\partial J^i(\vec{x}, t)}{\partial x^i}, \tag{5.13}$$

dove è sottintesa la somma su i. L'ultimo integrale, tramite il teorema di Stokes [1], è un integrale di superficie che si può pensare estesa all'infinito, dove la corrente è nulla. Quindi è zero.

Si potrebbe dimostrare che Q è scalare di Lorentz come conseguenza del fatto che j^μ è un quadrivettore, ma per questo rimandiamo a S.Weinberg, citato in bibliografia, pag. 40-41.

5.2 La forma covariante delle equazioni di Maxwell.

Il risultato principale della sezione precedente è l'aver mostrato che j^μ è un quadrivettore. Questo è un ingrediente essenziale per determinare la forma covariante delle equazioni di Maxwell.

Scriviamo le equazioni di Maxwell, nelle unità Heaviside-Lorentz (vedi Appendice A.1)

[1] Il teorema di Stokes si può applicare alla forma $\omega = J^1 dx^2 dx^3 + ciclic.$, il cui differenziale è $d\omega = \partial J^i / \partial x^i d^3x$.

$$
\begin{cases}
a) & \nabla \cdot \vec{E} & = \rho, \\
b) & \nabla \cdot \vec{H} & = 0, \\
c) & \nabla \wedge \vec{E} & = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\
d) & \nabla \wedge \vec{H} & = \frac{1}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.
\end{cases}
\tag{5.14}
$$

Notare che l'equazione di continuità è conseguenza di queste equazioni. Infatti si può ricavare prendendo la divergenza dell'equazione (d), tenendo conto del fatto che la divergenza di un rotore è zero, e infine utilizzando l'equazione (a).

Poniamo adesso

$$
\| F^{\mu}{}_{\nu} \| = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.15}
$$

Con un pò di lavoro si può verificare che le equazioni di Maxwell (a) e (d) si possono scrivere un forma compatta

$$
\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = j^{\nu}, \tag{5.16}
$$

dove la quadri-corrente è data da

$$
j^{\mu} \equiv (\rho, \frac{\vec{J}}{c}), \tag{5.17}
$$

mentre le equazioni (b) e (c) si scrivono

$$
\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\frac{\partial F_{\rho\lambda}}{\partial x^{\nu}} = 0, \tag{5.18}
$$

dove $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ è il tensore di Ricci, invariante come η, totalmente antisimmetrico e che vale 1 o -1 secondo che gli indici siano in un ordine che sia una permutazione pari o dispari rispetto alla permutazione $(0, 1, 2, 3)$.

Il tensore

$$
\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \tag{5.19}
$$

si chiama tensore duale di F.

Abbiamo chiamato F tensore; in effetti è un tensore antisimmetrico di rango due. Ciò si verifica dall'equazione (5.16), dove il secondo membro sappiamo che è un quadrivettore e naturalmente x^μ è anche un quadrivettore. Ciò garantisce il carattere tensoriale di F, come si può verificare anche esplicitamente.

Quindi le equazioni di Maxwell sono adesso scritte in forma covariante.

Si può inoltre verificare che l'equazione di moto per un carica q, che in forma non covariante è data dall'equazione (4.30), si può scrivere nella forma covariante

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F^\mu{}_\nu u^\nu, \tag{5.20}$$

dove u è la velocità della particella.

Le equazioni (5.16), (5.18) e (5.20) sono le equazioni dell'elettrodinamica.

5.3 Le proprietà di trasformazione dei campi.

Un tensore di rango 2 si trasforma sotto trasformazione di Lorentz con la legge

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}. \tag{5.21}$$

Nel caso del tensore F^μ_ν, definito da

$$F^\mu{}_\nu = F^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu}, \tag{5.22}$$

si ha la legge di trasformazione

$$F'^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\nu{}^\beta F^\alpha{}_\beta. \tag{5.23}$$

Da questa equazione si possono ricavare le proprietà di trasformazione dei campi $\vec{E}$ e $\vec{H}$. Il calcolo risulta piuttosto complicato. Un modo per semplificarlo è quello di considerare il tensore $F^\mu{}_\nu$ come il prodotto di due vettori $A^\mu B_\nu$ e applicare la legge di trasformazione dei vettori

$$V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu, \tag{5.24}$$

$$V'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu V_\nu. \tag{5.25}$$

In questo modo, per una trasformazione di Lorentz senza rotazione, usando la (3.2), si ha

$$\begin{cases} \vec{E}' &= \gamma\vec{E} + \frac{\vec{v}}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{E})(1-\gamma) + \frac{\gamma}{c}(\vec{v}\wedge\vec{H}), \\ \vec{H}' &= \gamma\vec{H} + \frac{\vec{v}}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{H})(1-\gamma) - \frac{\gamma}{c}(\vec{v}\wedge\vec{E}), \end{cases} \tag{5.26}$$

dove $\vec{E}$ e $\vec{H}$ sono i campi misurati nel sistema S e $\vec{E}'$ e $\vec{H}'$ sono i campi misurati nel sistema S', che si muove rispetto a S con velocità $\vec{v}$.

La trasformazione inversa si ottiene scambiando $\vec{E}$ e $\vec{H}$ con $\vec{E}'$ e $\vec{H}'$ e $\vec{v}$ con $-\vec{v}$.

Una semplice applicazione di queste proprietà di trasformazione si ha per il calcolo dei campi prodotti da una carica q in moto rettilineo uniforme.

Se la carica si muove con velocità $\vec{v}$ costante nel sistema di riferimento S, possiamo considerare il sistema S' nel quale la carica è a riposo. In quest'ultimo sistema esiste il solo campo elettrico Coulombiano

$$\begin{cases} \vec{E}' &= \frac{1}{4\pi}\frac{q\vec{r}'}{r'^3}, \\ \vec{H} &= 0, \end{cases} \tag{5.27}$$

dove $\vec{r}'$ è il vettore che congiunge la carica q e il punto P' un cui si calcola il campo nel sistema S'.

Questo vettore è la differenza dei due vettori di posizione, della carica e del punto P'.

Se si applica la trasformazione inversa da S' a S a questi campi, usando le equazioni inverse delle (5.26), si ottiene

$$\begin{cases} \vec{E} &= \frac{q}{4\pi r'^3}[\gamma\vec{r}' + \frac{\vec{v}}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{r}')(1-\gamma)], \\ \vec{H} &= \frac{q}{4\pi c r'^3}\gamma(\vec{v}\wedge\vec{r}'), \end{cases} \tag{5.28}$$

dove il vettore $\vec{r}'$ deve essere trasformato nel sistema S, cioè, se $\vec{r}$ è il vettore che congiunge la carica con il punto P in cui si calcolano i campi nel sistema S, dove P è il punto equivalente al punto P', allora, dalle (3.2), si ha

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}(\gamma - 1)\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{v^2}, \tag{5.29}$$

la cui inversa <u>non</u> si ottiene con $\vec{v} \to -\vec{v}$, ma si ha

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}\frac{(\vec{r}' \cdot \vec{v})}{v^2}\frac{1-\gamma}{\gamma}. \tag{5.30}$$

I campi si possono riscrivere

$$\begin{cases} \vec{E} & = \frac{q}{4\pi}\gamma\frac{\vec{r}}{r'^3}, \\ \vec{H} & = \frac{q}{4\pi c}\gamma\frac{\vec{v}\wedge\vec{r}}{r'^3}, \end{cases} \tag{5.31}$$

dove r' è dato dalla (5.29).

Il calcolo diretto, senza far uso delle proprietà di trasformazione dei campi, è molto più laborioso. Vedi, per esempio, C.Möller , §57.

Capitolo 6

Spazio assoluto, principio di Mach e principio di equivalenza

Newton riteneva che fosse necessario svincolare la definizione di spazio (e di tempo), e quindi anche di velocità, di accelerazione ecc., da quello che lui chiamava spazio relativo, definito in relazione a oggetti sensibili. Per questo scopo introdusse la nozione di spazio assoluto.

Riportiamo qui il passo in cui Newton da queste definizioni (in una libera traduzione):

"Sin qui ho dato le definizioni di quelle grandezze che sono meno note ed ho spiegato il senso nel quale vorrei che fossero intese nel seguito.

Non definisco il tempo, lo spazio, il luogo e il moto poiché sono ben noti.

Solo devo osservare che il senso comune concepisce queste grandezze solo in relazione a oggetti sensibili. Nascono da qui alcuni pregiudizi, per rimuovere i quali sarà conveniente distinguerle in assolute e relative, vere e apparenti, matematiche e comuni.

I......(qui definisce il tempo assoluto)......

II. Lo spazio assoluto, nella sua natura, senza relazione con alcunché di esterno, resta sempre simile a se stesso e immobile. Lo spazio relativo è una qualche dimensione o misura mobile dello spazio assoluto, che i nostri sensi determinano dalla sua posizione relativa ad altri corpi e che è comunemente preso per spazio immobile, determinato dalla sua posizione rispetto alla terra.

Lo spazio assoluto e quello relativo sono gli stessi in grandezza, ma non sono sempre gli stessi numericamente."

Ogni altro sistema di riferimento in moto rettilineo uniforme rispetto a questo spazio assoluto sarà ad esso equivalente e apparterrà alla classe dei sistemi inerziali. Come è noto, le leggi della dinamica si formulano in un riferimento inerziale.

Un sistema di riferimento che è inerziale con ottima approssimazione è il riferimento delle stelle fisse, cioè il sistema di riferimento con l'origine nel centro del sole e gli assi orientati secondo le stelle fisse.

Può essere ulteriormente approssimato ad un sistema inerziale tenendo conto del moto del sole rispetto al centro della nostra galassia e orientando gli assi non secondo una particolare stella, ma secondo la media delle posizioni di un numero via via crescente di stelle.

Mach sottopose a critica il concetto di spazio (e tempo) assoluto di Newton (Ernst Mach, "Die Mechanik in ihrer Entvicklung" , 1880, tradotto con "The science of mechanics" , 1893).

Mach si chiede quali siano le cause delle forze inerziali che si manifestano quando si mette in moto accelerato un corpo rispetto al sistema delle stelle fisse e le individua nelle masse lontane, oltre che della terra e del sole. Questa "influenza" si manifesta solo quando vi è un'accelerazione rispetto al sistema di riposo di queste masse (stelle fisse, appunto).

Questo è il cosiddetto principio di Mach, benché Mach non l'abbia mai enunciato esplicitamente.

C'è un semplice esperimento (vedi, per esempio,S.Weinberg, "Gravitation and Cosmology" , J.Wiley and Sons 1972, pag. 17) che chiarisce quanto Mach intende dire. Se immaginate di essere in piedi all'esterno in una notte stellata, con le braccia abbandonate lungo il corpo, osserverete che le stelle sono praticamente immobili e le vostre braccia ferme. Se adesso fate una giravolta su voi stessi le stelle gireranno sulla vostra testa e, contemporaneamente, le vostre braccia si allontaneranno dal corpo.

Quindi un corpo libero (le vostre braccia) permane nel suo stato di quiete nel sistema di riferimento delle stelle fisse. Il punto è che sembra un'incredibile coincidenza che le vostre braccia e insieme le stelle fisse condividano lo stesso sistema di riposo. Viene piuttosto naturale fare l'ipotesi che vi sia una relazione tra le stelle fisse e le vostre braccia, nel senso che sono le masse delle stelle che determinano il sistema di riferimento inerziale in cui vi è assenza di forza centrifuga.

Siamo di fronte ad una scelta: o ammettiamo con Newton che esiste uno spazio assoluto, che definisce i sistemi di riferimento inerziali e rispetto al quale accade (per caso?) che le stelle risultino a riposo, o ammettiamo con Mach che l'accelerazione di un corpo dipenda dalle masse vicine e lontane.

In realtà esiste una terza possibilità, quella del principio di equivalenza di Einstein, che ora vogliamo discutere.

Cominciamo con l'osservare che, con il principio di relatività speciale per tutte le leggi della fisica, perde di significato la nozione di spazio assoluto; infatti, se tutti i riferimenti sono equivalenti, non ha senso sceglierne uno come assoluto.

Una volta stabilito ciò, Einstein propose una nuova interpretazione delle forze fittizie in un sistema di riferimento accelerato: invece di considerarle come l'espressione di una differenza tra le equazioni di moto nel sistema accelerato e quelle del sistema inerziale, come si fa usualmente, considerò i due sistemi come completamente equivalenti, per ciò che riguarda la forma delle equazioni fondamentali.

Cioè, le forze "fittizie" diventano reali al pari delle altre forze. Saranno le masse distanti, che sono accelerate rispetto al nostro sistema non inerziale, che determinano tali forze, e che quindi diventano speciali forze gravitazionali.

L'idea che l'accelerazione delle masse distanti possa produrre un campo gravitazionale, che non è percettibile in un riferimento inerziale, non è più artificiosa che, per esempio, del fatto che un sistema elettrostatico manifesti un campo magnetico nullo nel sistema di riposo delle cariche, mentre manifesta un campo magnetico diverso da zero in ogni sistema in cui le cariche siano in moto con velocità costante.

Quindi, seguendo Einstein, va preso in considerazione anche l'effetto delle masse lontane.

Soltanto se si lavora in un sistema di riferimento inerziale non sarà necessario tener conto delle masse distanti. In questo senso e solo in questo i riferimenti inerziali si distinguono dagli altri.

In ogni caso si assume che tutti i sistemi di riferimento siano equivalenti rispetto alla formulazione delle leggi fondamentali della fisica. Questo principio si chiama principio di relatività generale.

I sistemi di riferimento inerziali sono allora quelli in cui le forze gravitazionali, determinate dalla masse lontane o da quelle vicine, sono assenti. Nel caso delle masse lontane ciò è equivalente alla definizione usuale, nel caso delle masse vicine, per esempio la terra, avremo che un riferimento inerziale sarà quello in caduta libera, che quindi sarà necessariamente locale, nel senso che non potrà essere esteso oltre una certa misura di spazio e tempo. È per questo motivo che vengono anche chiamati sistemi in caduta libera o “free falling” .

Questi sistemi in caduta libera sono determinati nella relatività di Einstein dal campo gravitazionale locale che, a sua volta, è determinato da tutta la materia dell’universo, vicina e lontana. Tuttavia, una volta che si sia in un riferimento inerziale, le leggi del moto non sono affette dalla presenza di masse vicine, appunto per come sono definiti. Per esempio, la massa del sole determina la caduta libera della terra, e quindi sulla terra, non possiamo determinare il campo di gravità del sole. Questo è un fatto che è stato verificato sperimentalmente (R.H.Dicke, Ann.Phys., **26**, 442 (1967)).

In modo analogo, se si è in un ascensore in caduta libera, non possiamo sperimentare la gravità terrestre.

Quanto si è detto è possibile per l’identità tra massa gravitazionale e massa inerziale, che fa si che sia possibile considerare le forza di gravità e le forze inerziali della stessa natura.

A questo punto possiamo enunciare il principio di equivalenza di Einstein.

“in ogni punto dello spazio-tempo in un campo gravitazionale arbitrario è possibile scegliere un sistema di coordinate “localmente inerziale” tale che, in una regione sufficientemente piccola del punto in questione, le leggi della natura prendano la stessa forma che hanno in un sistema di coordinate cartesiane non accelerate in assenza di gravità.”

Aggiungiamo per chiarezza che la forma che le leggi della fisica hanno in un sistema cartesiano non accelerato e in assenza di gravità è quella dettata dalla relatività speciale.

Nella forma debole di questo principio al posto di “leggi della natura” vi è ,“le leggi di moto di particelle in caduta libera” . La forma forte è quella enunciata, che si riferisce a tutte le leggi della natura e non alle sole forze meccaniche.

Detto in sintesi, questo principio stabilisce l’equivalenza tra gravità e inerzia.

Da quanto si è detto risulta la differenza rispetto al principio di Mach: il principio di Mach afferma che l’inerzia qui sulla terra è determinata dalle masse lontane, tuttavia una massa vicina altera le equazioni del moto. Viceversa, il principio di equivalenza afferma che una massa vicina potrà cambiare il riferimento inerziale, nel senso che questo riferimento diverrà un determinato riferimeno di caduta libera, ma, una volta che ciò sia avvenuto, non vi sarà alcun altro effetto dovuto a questa massa.

Hughes et al.(V.W.Hughes, H.G.Robinson and V.Beltran-Lopez, Phys.Rev.Letters, **4**, 342 (1960)) hanno eseguito un esperimento che verifica la seconda possibilità e quindi il principio di equivalenza di Einstein.

Bibliografia.

C.W.Misner, K.S.Thorne and J.A.Wheeler, Gravitation, Freeman and Co., 1971, pag. 543.

S.Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, John Wiley and Sons, 1972, pag. 17, 87.

Appendice A

Appendice sulle unità di misura.

A.1 Equazioni di Maxwell

(tratto da J.D.Jackson, Classical electrodynamics)

Nel sistema SI (Système International d'Unités) le equazioni di Maxwell si scrivono:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} & = \rho, \\ \nabla \cdot \vec{B} & = 0, \\ \nabla \wedge \vec{E} & = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \wedge \vec{H} & = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \end{cases} \tag{A.1}$$

dove, nel vuoto, si ha che $\vec{D}$ e $\vec{B}$ sono legati ai campi elettrico e magnetico $\vec{E}$ e $\vec{B}$ da

$$\vec{D} = \epsilon_\circ \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_\circ \vec{H}, \tag{A.2}$$

dove, nel sistema di misura SI $\epsilon_\circ$ e $\mu_\circ$ sono dati da

$$\epsilon_\circ = \frac{1}{4\pi c^2} 10^7, \quad \mu_\circ = 4\pi 10^{-7}. \tag{A.3}$$

Inoltre l'espressione della forza di Lorentz per unità di carica si scrive

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}. \tag{A.4}$$

In queste espressioni $c = 299792458$ m/sec.

Ricordiamo che nel sistema SI le unità fondamentali sono: kilogrammo, metro, secondo e ampere.

Le equazioni fondamentali per fissare un determinato sistema di unità di misura sono le seguenti:
l'equazione di continuità

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{A.5}$$

la legge di Coulomb

$$F = k_1 \frac{qq'}{r^2}, \tag{A.6}$$

la legge di Ampère

$$\frac{dF}{dl} = 2k_2 \frac{II'}{d}, \tag{A.7}$$

dove I e I' sono due correnti e d la loro distanza, la legge di Biot e Savart

$$B = 2k_2\alpha \frac{I}{d}, \tag{A.8}$$

e la terza equazione di Maxwell

$$\nabla \wedge \vec{E} + k_3 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \tag{A.9}$$

Le costanti k_1, k_2, α e k_3 non sono indipendenti, k_1 e k_2 sono legati da

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2. \tag{A.10}$$

Le equazioni di Maxwell con queste costanti si scrivono

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} & = 4\pi k_1 \rho, \\ \nabla \cdot \vec{B} & = 0, \\ \nabla \wedge \vec{E} & = -k_3 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \wedge \vec{B} & = 4\pi k_2 \alpha \vec{J} + \frac{k_2 \alpha}{k_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases} \tag{A.11}$$

Nel sistema SI si ha

$$k_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ} = 10^{-7}c^2, \quad k_2 = \frac{\mu_\circ}{4\pi} = 10^{-7}, \quad \alpha = 1, \quad k_3 = 1. \tag{A.12}$$

Nel sistema di Heaviside-Lorentz si ha

$$k_1 = \frac{1}{4\pi}, \quad k_2 = \frac{1}{4\pi c^2}, \quad \alpha = c, \quad k_3 = \frac{1}{c}, \tag{A.13}$$

e inoltre

$$\epsilon_\circ = 1, \qquad \mu_\circ = 1, \tag{A.14}$$

e quindi le equazioni di Maxwell si scrivono in questo sistema

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} & = \rho, \\ \nabla \cdot \vec{H} & = 0, \\ \nabla \wedge \vec{E} & = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \nabla \wedge \vec{H} & = \frac{1}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases} \tag{A.15}$$

In questo sistema la forza di Lorentz per unità di carica si scrive

$$\vec{F} = \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \wedge \vec{H}. \tag{A.16}$$

Abbiamo riportato le equazioni di Maxwell in questo sitema perchè è quello spesso usato quando si discute di relatività. Infatti in questo sistema risulta più evidente il fattore c, ed è anche più utile per porre queste equazioni in una forma covariante.

A.2 Unità di energia

Per unità di energia abbiamo usato l'eV, che è stato definito come l'energia acquistata da un elettrone nell'attraversare la differenza di potenziale di 1 Volt.

Tenuto conto che la carica di un eletrone è data da

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{Coulomb}, \tag{A.17}$$

si ha

$$1\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{Coulomb} \quad \text{Volt}. \tag{A.18}$$

Dato che $1\text{Coulomb}\,\text{Volt} = 1\text{Joule} = 10^{-7}\text{erg}$, si ha

$$1\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-12}\text{erg}. \tag{A.19}$$

Le masse dei nucleoni sono date da

$$\begin{cases} m_p & = 931,494 \cdot 1,007276 = 938,272 \quad \text{MeV}, \\ m_n & = 931,494 \cdot 1,008666 = 939,565 \quad \text{MeV}, \end{cases} \tag{A.20}$$

dove il fattore $931,494$ è il fattore di conversione da u.m.a. a MeV.

Notare che adesso la massa del protone è inferiore alla massa data nella (4.62), che è quella dell'atomo di idrogeno ${}^1_1H$.

* * * * * * * *

Bibliografia

[1] C.Möller, The Theory of Relativity, Oxford at the Clarendon Press, 1952. Fino al terzo capitolo compreso.

[2] W.G.V.Rosser, An Introduction to the Theory of Relativity, London Butterworths, terza ed. 1071. Fino al quinto capitolo compreso.

[3] W.Rindler, Essential Relativity, Special, General, and Cosmological, Springer-Verlag, seconda ed., 1977. Fino al quinto capitolo compreso.

[4] S.Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley and Sons, 1972. I primi quattro paragrafi del secondo capitolo.