

Programma di  
METODI MATEMATICI DELLA FISICA (B,D,F)  
Anno Accademico 2001-2002

(1) - Funzioni di una variabile complessa. Funzioni analitiche. Equazioni di Cauchy-Riemann. Le funzioni polidrome  $\ln z$  e  $z^\alpha$ . Teorema di Cauchy-Goursat per il rettangolo. Teorema di Cauchy per un disco. Singolarità eliminabili. Formula integrale di Cauchy. Indice di un punto rispetto ad un cammino chiuso. Formula integrale per la derivata  $n$ -esima. Sviluppo in serie di Taylor. Forma generale del teorema di Cauchy. **Sviluppo in serie di Laurent.** Residuo di una funzione in una singolarità isolata. Teorema dei residui. Formule per il calcolo dei residui nei poli. Lemma di Jordan. Caratterizzazione delle singolarità isolate; teoremi di Casorati-Weierstrass e di Picard. **Formule di Poisson per il disco e per il semipiano.** Applicazione al problema di Dirichlet per il disco e per il semipiano. Teorema dell'indicatore logaritmico. Principio del massimo e unicità della soluzione del problema di Dirichlet. Rappresentazione conforme. Teorema di Riemann e applicazione al problema di Dirichlet. Proprietà della funzione Gamma di Eulero.

(2) - Trasformate. Trasformata di Fourier. Trasformata di Fourier della derivata e derivata della trasformata. Teoremi di inversione per la trasformata di Fourier. **Teorema sulla trasformata di Fourier del prodotto e del prodotto di convoluzione e formula di Parseval.** Trasformata di Laplace. Ascissa di assoluta convergenza. Trasformata di Laplace della derivata. Inversione della trasformata di Laplace. Teorema sulla trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione. Sviluppi asintotici. Sviluppo asintotico della Gamma di Eulero.

(3) - Equazioni differenziali ordinarie. Sistemi lineari di equazioni differenziali. La matrice fondamentale. **Metodo della variazione delle costanti.**

Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti. Forma di Jordan di una matrice ed esponenziale di una matrice. **Soluzione di una equazione differenziale ordinaria omogenea nell'intorno di un punto ordinario e nell'intorno di una singolarità regolare.** Equazioni di Legendre, Hermite e Bessel. Problemi ai limiti con condizioni bilocali per equazioni differenziali ordinarie. Funzione di Green e sue proprietà.

(4) - Teoria dei Gruppi e Relatività. Gruppi. Gruppo delle rotazioni  $SO(3)$  e suo ricoprimento universale  $SU(2)$ . Gruppi di Lie connessi e loro gruppi di ricoprimento universale. Algebre di Lie. Rappresentazioni. **Rappresentazioni irriducibili di  $SU(2)$ .** **Gruppo di Lorentz, il gruppo di Poincaré e le loro algebre di Lie.** Il gruppo di ricoprimento universale  $SL(2, C)$ . Cenni alle appresentazioni finite del gruppo proprio di Lorentz. Spinori.

Tensori. Spazi pseudo-Euclidei. Componenti covarianti e controvarianti. Cinematica relativistica. **Covarianza delle equazioni di Maxwell e dell'elettrodinamica.**

(5) - Distribuzioni. Distribuzioni regolari e singolari. Operazioni sulle distribuzioni. Derivata di una distribuzione. Rappresentazioni della delta di Dirac. Distribuzioni temperate. **Esempi** ( $D\theta = \delta$ ), ( $D\ln|x| = Pv1/x$ ), ( $1/(x \pm i0) = Pv1/x \mp i\pi\delta$ ). Supporto di distribuzioni. Prodotto diretto di distribuzioni. Prodotto di convoluzione di distribuzioni. Proprietà del prodotto di convoluzione. Trasformata di Fourier per distribuzioni temperate. **Trasformata di Fourier della derivata di una distribuzione e derivata della trasformata.** Trasformata di Fourier della  $\delta$ , di una distribuzione costante e

**della funzione di Heaviside.** Soluzione fondamentale per un operatore differenziale lineare. **Soluzione fondamentale per il Laplaciano in 3 dimensioni.** Trasformata di Fourier della  $\delta(r - a)$ . **Soluzione fondamentale per il d'Alembertiano in 3 dimensioni spaziali; funzione di Green  $E_r$  ritardata.** Trasformata di Fourier di  $-1/(p_0^2 - p^2)$ .

(6) - **Spazi di Hilbert e operatori.** Spazi metrici. Spazi normati, di Banach. Spazi di Hilbert. Teorema della proiezione. Ortogonalizzazione di Gram Schmidt. Basi ortonormali e loro caratterizzazione. Polinomi ortogonali e basi ortonormali in spazi  $L^2$ . Funzionali lineari. **Teorema della rappresentazione di Riesz.** Operatori limitati. Operatore inverso e aggiunto. Proprietà dell'aggiunto: doppio aggiunto, aggiunto della somma e del prodotto. Operatori unitari. Operatori simmetrici, autoaggiunti. Proiettori. Operatori isometrici. L'operatore trasformata di Fourier. Operatori non limitati, densamente definiti e loro aggiunto. Operatori chiusi. **Elementi di teoria spettrale degli operatori.** Spettri di operatori simmetrici, autoaggiunti, unitari. **Criterio di autoaggiuntezza per operatori simmetrici.** Autoaggiuntezza dell'operatore di posizione. Autoaggiuntezza dell'operatore impulso in meccanica quantistica.

Le dimostrazioni richieste sono quelle delle parti del programma indicate in grassetto.