Forma covariante delle equazioni di Maxwell

Indice

1 Introduzione ai tensori

Consideriamo uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbf{R}$. Sia n la sua dimensione e e_a, $(a = 1, 2 \cdots, n)$, una base in tale spazio. Un generico vettore v sara' allora esprimibile come

$$v = v^a e_a \tag{1.1}$$

Stiamo usando la *convenzione sommatoria* ovvero la sommatoria è sottintesa quando un indice è ripetuto.

Chiameremo i vettori di V vettori *controvarianti* e le v^a le *componenti controvarianti*. Dato V e' possibile costruire uno spazio vettoriale associato, detto il *duale* di V e che sara' indicato con V^*. Lo spazio $V^* = L(V, \mathbf{R})$ e' lo spazio delle applicazioni lineari da $V \to \mathbf{R}$. Se $f \in L(V, \mathbf{R})$, avremo

$$f(v) \in \mathbf{R} \;\; \forall v \in V \tag{1.2}$$

Poiche' f e' lineare avremo

$$f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w) \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \forall v, w \in V \tag{1.3}$$

Vediamo ora come sia possibile assegnare a V^* la struttura di spazio vettoriale. Definiamo a questo scopo la somma di due applicazioni come quella applicazione tale che

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v), \quad f, g \in V^* \;\; \forall v \in V \tag{1.4}$$

ed il prodotto di un'applicazione per un numero reale α

$$(\alpha f)(v) = \alpha f(v) \;\; f \in V^* \;\; \forall v \in V \tag{1.5}$$

Dalle definizioni date di somma di applicazioni e di prodotto di un'applicazione per un numero e' immediato verificare che V^* soddisfa gli assiomi di spazio vettoriale.

Osserviamo inoltre che $V^{**} = L(V^*, \mathbf{R})$ e' isomorfo allo spazio V stesso. L'isomorfismo e' costruito associando a ciascun $v \in V$ $v^{**} \in V^{**}$, definito da $v^{**}(f) = f(v)$ $\forall f \in V^*$.

I vettori dello spazio duale V^* saranno chiamati vettori *covarianti*.

Data una base in V si puo' costruire una base in V^* nel seguente modo: consideriamo le applicazioni ω^a tali che

$$\omega^a(e_b) = \delta^a_b \quad a, b = 1, \cdots n \tag{1.6}$$

Allora il generico $f \in V^*$ può esser rappresentato nella forma

$$f = f_a \omega^a \tag{1.7}$$

con $f_a = f(e_a)$. Infatti

$$f(v) = f(v^a e_a) = f(e_a) v^a \tag{1.8}$$

dove v^a sono le componenti di v nella base data. D'altra parte

$$f_a \omega^a(v) = f_a \omega^a(v^b e_b) = f_a v^b \delta^a_b = f_a v^a \tag{1.9}$$

Questo mostra che in effetti le ω^a formano una base per V^* e quindi anche V^* e' uno spazio vettoriale n-dimensionale. Le f_a sono le *componenti covarianti*.

Un vettore ha una definizione intrinseca che quindi non dipende dalla scelta della base. Naturalmente in una base diversa da quella fissata originariamente le componenti del vettore saranno diverse. La variazione delle componenti puo' essere facilmente calcolata a partire dalla trasformazione della base. Supponiamo allora che la base sia trasformata nel modo seguente:

$$e_a \to e'_b = \Lambda_b^{\cdot a} e_a \tag{1.10}$$

con $(\Lambda)_{ba} \equiv \Lambda_b^{\cdot a}$ una matrice $n \times n$ nonsingolare (b denota le righe ed a le colonne). Per calcolare la trasformazione delle componenti usiamo il fatto che v non dipende dalla base e quindi

$$v = v^a e_a = v'^b e'_b = v'^b \Lambda_b^{\cdot a} e_a \tag{1.11}$$

e pertanto

$$v^a = \Lambda_b^{\cdot a} v'^b \tag{1.12}$$

Congiuntamente alla base e_a, la base duale ω^a subira' una trasformazione, visto che la base duale e' definita in riferimento alla base usata per V (vedi eq.(1.6)). Avremo dunque

$$\omega^a \to \omega'^b = \tilde{\Lambda}^b_{\cdot a} \omega^a \tag{1.13}$$

con $\tilde{\Lambda}^b_{\cdot a}$ un'altra matrice nonsingolare. Ma usando la (1.6) nella nuova base si ha

$$\omega'^{a'}(e'_{b'}) = \tilde{\Lambda}^{a'}_{\cdot a} \Lambda_{b'}^{\cdot b} \omega^a(e_b) = \tilde{\Lambda}^{a'}_{\cdot a} \Lambda_{b'}^{\cdot a} \tag{1.14}$$

Segue dunque

$$\tilde{\Lambda}^{a'}_{\cdot a} \Lambda_{b'}^{\cdot a} = \delta^{a'}_{b'} \tag{1.15}$$

Possiamo allora invertire la relazione (1.12), moltiplicando per $\tilde{\Lambda}^c_{\cdot a}$ e sommando su a

$$v'^b = \tilde{\Lambda}^b_{\cdot a} v^a \tag{1.16}$$

Analogamente le componenti di un vettore covariante si trasformano con la matrice Λ. Infatti

$$f'_a = f(e'_a) = f(\Lambda_a^{\cdot b} e_b) = \Lambda_a^{\cdot b} f_b \tag{1.17}$$

Esempio

Se consideriamo il caso $V = \mathbf{R}^n$, potremo scrivere il generico elemento come il vettore colonna

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v^n \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

Una base e' data allora da

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

Possiamo allora rappresentare la generica applicazione come

$$f(v) = f_a v^a = (f_1, f_2, \cdots, f_n) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ . \\ . \\ . \\ v^n \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

Pertanto i vettori duali possono essere pensati come vettori riga. Il generico elemento del duale potra' allora essere scritto come $f = f_a \omega^a$, con la base duale data da

$$\omega^1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots, \omega^n = (0, 0, \cdots, 1) \tag{1.21}$$

La relazione (1.16) diventa

$$v' = \tilde{\Lambda} v \tag{1.22}$$

la (1.17)

$$f' = f \Lambda^T \tag{1.23}$$

dove Λ^T indica la matrice trasposta della Λ. Infine la (1.15)

$$\Lambda \tilde{\Lambda}^T = I \tag{1.24}$$

Usando una procedura analoga a quella seguita per la costruzione del duale e' possibile costruire altri spazi vettoriali che ci permetteranno di definire i tensori di rango (r, s). A tal fine costruiamo il seguente spazio ottenuto come prodotto cartesiano di r copie di V^* e di s copie di V:

$$\Pi_r^s = (V^*)^r (V)^s \tag{1.25}$$

Un *tensore* è una applicazione multilineare da $\Pi_r^s \to \mathbf{R}$ (cioe' lineare in tutti gli argomenti). Lo spazio di queste applicazioni lineari sara' indicato con $T(r, s)$ e sara' detto lo *spazio dei tensori di rango* (r, s). Per esempio $T(0, 1) = V^*$ poiche' questo e' lo spazio delle applicazioni da $V \to \mathbf{R}$. Analogamente si ha $T(1, 0) = V$, poiche' le applicazioni da $V^* \to \mathbf{R}$ danno il duale del duale che come abbiamo visto coincide con lo spazio vettoriale di partenza. Il generico elemento di $T(r, s)$ sara' allora indicato con T e sara' un tensore *controvariante di ordine* r e *covariante di ordine* s:

$$\eta^1, \eta^2, \cdots, \eta^r, Y_1, Y_2, \cdots, Y_s \to T(\eta^1, \eta^2, \cdots, \eta^r; Y_1, Y_2, \cdots, Y_s), \tag{1.26}$$

con $\eta^1, \eta^2, \cdots \eta^r \in V^*$ e $Y_1, Y_2, \cdots Y_s \in V$.

Lo spazio $T(r,s)$ puo' essere dotato della struttura di spazio vettoriale cosi' come abbiamo fatto per lo spazio duale. Definiremo cioe' la somma di due elementi $T(r,s)$

$$\begin{gathered}(T+T')(\eta^1, \eta^2, \cdots, \eta^r; Y_1, Y_2, \cdots, Y_s) = \\ = T(\eta^1, \eta^2, \cdots, \eta^r; Y_1, Y_2, \cdots, Y_s) + T'(\eta^1, \eta^2, \cdots, \eta^r; Y_1, Y_2, \cdots, Y_s)\end{gathered} \tag{1.27}$$

ed il prodotto di un elemento di $T(r,s)$ per un numero reale α

$$(\alpha T)(\eta^1, \eta^2, \cdots, \eta^r; Y_1, Y_2, \cdots, Y_s) = \alpha T(\eta^1, \eta^2, \cdots, \eta^r; Y_1, Y_2, \cdots, Y_s) \tag{1.28}$$

Consideriamo ora lo spazio $\mathcal{T}$ costituito dall'insieme di tutti gli spazi $T(r,s)$. E' allora possibile definire in questo spazio una operazione che prende il nome di *prodotto tensoriale*.

Dato il tensore $T \in T(r,s)$ e il tensore e $T' \in T(r',s')$ il prodotto tensoriale di T e T' é il tensore $T \otimes T' \in T(r+s, r'+s')$ definito dalla relazione

$$\begin{gathered}(T \otimes T')(\eta^1, \cdots, \eta^{r+r'}; Y_1, \cdots, Y_{s+s'}) = \\ = T(\eta^1, \cdots, \eta^r; Y_1, \cdots, Y_s) \cdot T'(\eta^{r+1}, \cdots, \eta^{r+r'}; Y_{s+1}, \cdots, Y_{s+s'})\end{gathered} \tag{1.29}$$

Introduciamo ora un insieme speciale di elementi di $T(r,s)$

$$t^{b_1 b_2 \cdots b_s}_{a_1 a_2 \cdots a_r} \equiv e_{a_1} \otimes e_{a_2} \otimes \cdots \otimes e_{a_r} \otimes \omega^{b_1} \otimes \omega^{b_2} \otimes \cdots \otimes \omega^{b_s} \quad a_k, b_k = 1 \ldots n \tag{1.30}$$

Questi sono n^{r+s} elementi di $T(r,s)$, definiti come quelle applicazioni che mappano

$$(\eta^1, \eta^2, \cdots, \eta^r; Y_1, Y_2, \cdots, Y_s) \tag{1.31}$$

in

$$\eta^1(e_{a_1}) \cdots \eta^r(e_{a_r}) \omega^{b_1}(Y_1) \cdots \omega^{b_s}(Y_s) \tag{1.32}$$

Ovvero

$$t^{b_1 b_2 \cdots b_s}_{a_1 a_2 \cdots a_r}(\eta^1, \eta^2, \cdots, \eta^r; Y_1, Y_2, \cdots, Y_s) = \eta^1_{a_1} \cdots \eta^r_{a_r} Y_1^{b_1} \cdots Y_s^{b_s} \tag{1.33}$$

dove abbiamo introdotto le componenti degli $\eta^1, \cdots, \eta^r$ e degli $Y_1, \cdots, Y_s$:

$$\eta^1 = \eta^1_{a_1} \omega^{a_1}, \cdots, \eta^r = \eta^r_{a_r} \omega^{a_r}, \qquad Y_1 = Y_1^{a_1} e_{a_1}, \cdots, Y_s = Y_s^{a_s} e_{a_s} \tag{1.34}$$

In particolare

$$t^{b_1 b_2 \cdots b_s}_{a_1 a_2 \cdots a_r}(\omega^{c_1}, \omega^{c_2}, \cdots, \omega^{c_r}; e_{d_1}, e_{d_2}, \cdots, e_{d_s}) = \delta^{c_1}_{a_1} \delta^{c_2}_{a_2} \cdots \delta^{c_r}_{a_r} \delta^{b_1}_{d_1} \delta^{b_2}_{d_2} \cdots \delta^{b_s}_{d_s} \tag{1.35}$$

Possiamo vedere facilmente che questi n^{r+s} elementi di $T(r,s)$ costituiscono una base. Infatti essi sono linearmente indipendenti perché

$$f^{a_1 \cdots a_r}_{b_1 \cdots b_s} t^{b_1 b_2 \cdots b_s}_{a_1 a_2 \cdots a_r} = 0 \tag{1.36}$$

implica $f^{a_1 \cdots a_r}_{b_1 \cdots b_s} = 0$ (come segue utilizzando la (1.35)).

Inoltre il generico tensore $T \in T(r,s)$ puo' essere decomposto come

$$T = T^{a_1 a_2 \cdots a_r}_{b_1 b_2 \cdots b_s} t^{b_1 b_2 \cdots b_s}_{a_1 a_2 \cdots a_r} \tag{1.37}$$

con

$$T^{a_1 a_2 \cdots a_r}_{b_1 b_2 \cdots b_s} = T(\omega^{a_1}, \omega^{a_2}, \cdots, \omega^{a_r}, e_{b_1}, e_{b_2}, \cdots, e_{b_s}) \tag{1.38}$$

Infatti

$$\begin{aligned} T(\eta^1, \eta^2, \cdots, \eta^r; Y_1, Y_2, \cdots, Y_s) \; &= T(\omega^{a_1}, \omega^{a_2}, \cdots, \omega^{a_r}; e_{b_1}, e_{b_2}, \cdots, e_{b_s}) \\ & \quad \eta^1_{a_1} \eta^2_{a_2} \cdots \eta^r_{a_r} Y_1^{b_1} Y_2^{b_2} \cdots Y_s^{b_s} \end{aligned} \tag{1.39}$$

D'altra parte per la (1.33)

$$\begin{aligned} T(\eta^1, \eta^2, \cdots, \eta^r; Y_1, Y_2, \cdots, Y_s) \; &= T^{a_1 a_2 \cdots a_r}_{b_1 b_2 \cdots b_s} t^{b_1 b_2 \cdots b_s}_{a_1 a_2 \cdots a_r} (\eta^1, \eta^2, \cdots, \eta^r; Y_1, Y_2, \cdots, Y_s) \\ &= T^{a_1 a_2 \cdots a_r}_{b_1 b_2 \cdots b_s} \eta^1_{a_1} \eta^2_{a_2} \cdots \eta^r_{a_r} Y_1^{b_1} Y_2^{b_2} \cdots Y_s^{b_s} \end{aligned} \tag{1.40}$$

Le quantita' $T^{a_1 a_2 \cdots a_r}_{b_1 b_2 \cdots b_s}$ sono le componenti del tensore T. E' ovvio dalle definizioni date che:

$$(T + T')^{a_1 a_2 \cdots a_r}_{b_1 b_2 \cdots b_s} = T^{a_1 a_2 \cdots a_r}_{b_1 b_2 \cdots b_s} + T'^{a_1 a_2 \cdots a_r}_{b_1 b_2 \cdots b_s} \tag{1.41}$$

e

$$(\alpha T)^{a_1 a_2 \cdots a_r}_{b_1 b_2 \cdots b_s} = \alpha T^{a_1 a_2 \cdots a_r}_{b_1 b_2 \cdots b_s} \tag{1.42}$$

Per esempio

$$v \otimes w = v^a w^b e_a \otimes e_b \tag{1.43}$$

da cui, come deve essere

$$(v \otimes w)^{ab} = v^a w^b \tag{1.44}$$

La formula (1.16) puo' anche essere ottenuta osservando che in generale le componenti di un tensore possono essere ottenute valutando il tensore sulla base duale, cioe'

$$T^{a_1 a_2 \cdots a_r}_{b_1 b_2 \cdots b_s} = T(\omega^{a_1}, \omega^{a_2}, \cdots, \omega^{a_r}, e_{b_1}, e_{b_2}, \cdots, e_{b_s}) \tag{1.45}$$

Per esempio

$$v^a = \omega^a(v) \tag{1.46}$$

Usando quest'ultima relazione si ha

$$v'^a = \omega'^a(v) = \tilde{\Lambda}^a_{\cdot b} \omega^b(v) = \Lambda^a_{\cdot b} v^b \tag{1.47}$$

Segue allora

$$\begin{aligned} T'^{a_1' a_2' \cdots a_r'}_{b_1' b_2' \cdots b_s'} \; &= T(\omega'^{a_1'}, \omega'^{a_2'}, \cdots, \omega'^{a_r'}, e'_{b_1'}, e'_{b_2'}, \cdots, e'_{b_s'}) \\ &= \tilde{\Lambda}^{a_1'}_{\cdot a_1} \tilde{\Lambda}^{a_2'}_{\cdot a_2} \cdots \tilde{\Lambda}^{a_r'}_{\cdot a_r} \Lambda^{\cdot b_1}_{b_1'} \Lambda^{\cdot b_2}_{b_2'} \cdots \Lambda^{\cdot b_s}_{b_s'} T^{a_1 a_2 \cdots a_r}_{b_1 b_2 \cdots b_s} \end{aligned} \tag{1.48}$$

Un esempio di tensore è il tensore δ di Kronecker. Questo appartiene a $T(1,1)$ ed è definito da

$$\delta(\eta, Y) = \eta(Y) = \eta_a Y^a \quad \eta \in V^*, \quad Y \in V \tag{1.49}$$

Le sue componenti sono

$$\delta(\omega^b, e_a) = \delta_a^b \tag{1.50}$$

Dato un tensore in $T(r,s)$ con $r > 1, s > 1$ e' possibile definire un tensore appartenente a $T(r-1, s-1)$ tramite la cosi' detta operazione di *contrazione* C_1^1. C_1^1 e' una applicazione $T(r,s) \to T(r-1, s-1)$ cosi' definita: dato un tensore T di $T(r,s)$

$$T = T^{a_1 a_2 \cdots a_r}_{b_1 b_2 \cdots b_s} e_{a_1} \otimes e_{a_2} \otimes \cdots \otimes e_{a_r} \otimes \omega^{b_1} \otimes \omega^{b_2} \otimes \cdots \otimes \omega^{b_s} \tag{1.51}$$

$C_1^1(T) \in T(r-1, s-1)$ e' dato da

$$C_1^1(T) = T^{a a_2 \cdots a_r}_{a b_2 \cdots b_s} e_{a_2} \otimes \cdots \otimes e_{a_r} \otimes \omega^{b_2} \cdots \otimes \omega^{b_s} \tag{1.52}$$

Affinche' la contrazione sia ben definita e' necessario verificare che la definizione data sia indipendente dalla base. Infatti si ha

$$\begin{aligned} C_1^1(T)' &= T'^{a' a_2' \cdots a_r'}_{a' b_2' \cdots b_s'} e'_{a_2'} \otimes \cdots \otimes e'_{a_r'} \otimes \omega'^{b_2'} \cdots \otimes \omega'^{b_s'} \\ &= \tilde{\Lambda}^{a'}_{\cdot a} \Lambda^{b}_{\cdot a'} T^{a a_2 \cdots a_r}_{b b_2 \cdots b_s} e_{a_2} \otimes \cdots \otimes e_{a_r} \otimes \omega^{b_2} \cdots \otimes \omega^{b_s} = C_1^1(T) \end{aligned} \tag{1.53}$$

Altre operazioni che si possono definire su un tensore sono le operazioni di simmetrizzazione ed antisimmetrizzazione. Per esempio, dato un tensore di tipo $(2,0)$, $T(\eta_1, \eta_2)$, la sua *parte simmetrica* e' data da

$$(ST)(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2}\left(T(\eta_1, \eta_2) + T(\eta_2, \eta_1)\right) \tag{1.54}$$

e la sua *parte antisimmetrica* da

$$(AT)(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2}\left(T(\eta_1, \eta_2) - T(\eta_2, \eta_1)\right) \tag{1.55}$$

Si verifica immediatamente che ST ed AT sono tensori (cioe' che le definizioni date non dipendono dalla base). Le componenti di questi tensori sono rispettivamente

$$(ST)^{ab} = \frac{1}{2}\left(T^{ab} + T^{ba}\right), \quad (AT)^{ab} = \frac{1}{2}\left(T^{ab} - T^{ba}\right) \tag{1.56}$$

Un altro tensore che ci sara' utile nel seguito e' il *tensore metrico*. Questo e' un tensore simmetrico di rango (0,2), cioe' una applicazione g di Vx$V \to \mathbf{R}$. Le componenti di g si ottengono valutandolo su una base

$$g(e_i, e_j) = g_{ij} \quad i,j = 1, \cdots n \tag{1.57}$$

e quindi potremo scrivere

$$g = g_{ij}\omega^i \otimes \omega^j, \qquad g_{ij} = g_{ji} \tag{1.58}$$

Se $\det |g_{ij}| \neq 0$ si dice che la metrica e' *non degenere*. L'assegnazione di un tensore metrico permette di definire un'applicazione da $V \to V^*$, che indicheremo ancora con g, definito come

$$g(v, w) = g(v)(w) \tag{1.59}$$

Le componenti di $g(v)$ possono essere calcolate immediatamente notando che si puo' scrivere

$$g(v, w) = g_{ij} v^i w^j = g(v)_j w^j \tag{1.60}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la definizione di $g(v)$. Per confronto vediamo che

$$g(v)_i = g_{ij} v^j \tag{1.61}$$

e quindi $g(v) = g(v)_j \omega^j = g_{ij} v^i \omega^j$. Le quantità in (1.61) sono anche dette le componenti *covarianti* del vettore v (mentre le v^i sono le componenti *controvarianti*) e saranno indicate con l'indice in basso:

$$v_i \equiv g_{ij} v^j \tag{1.62}$$

Si ha anche immediatamente che

$$g(e_i) = g_{ij} \omega^j \tag{1.63}$$

Notiamo che se g e' non degenere allora il mapping tra V e V^* definito dalla metrica e' invertibile, e si puo' introdurre il mapping inverso $g^{-1} \colon V^* \to V$. La sua azione sulla base duale sara'

$$g^{-1}(\omega^i) = g^{ij} e_j \tag{1.64}$$

dove g^{ij} e' la matrice inversa di g_{ij}

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k \tag{1.65}$$

Infatti

$$g(g^{-1}(\omega^i)) = g(g^{ij} e_j) = g^{ij} g_{jk} \omega^k = \omega^i \tag{1.66}$$

Tramite la matrice inversa possiamo definire le componenti controvarianti di un vettore covariante come

$$\eta^i \equiv g^{-1}(\eta)^i = g^{ij} \eta_j \tag{1.67}$$

Infatti

$$g^{-1}(\eta) = g^{-1}(\eta_i \omega^i) = \eta_i g^{-1}(\omega^i) = \eta_i g^{ij} e_j \tag{1.68}$$

Chiaramente il mapping g, quando e' non degenere, stabilisce un isomorfismo tra V e V^*. Notiamo infine che possiamo definire un tensore g^{-1} di rango (2,0),

$$g^{-1}(\eta_1, \eta_2) = \eta_1(g^{-1}(\eta_2)) = g^{ij} \eta_i \eta_j \quad \eta_1, \eta_2 \in V^* \tag{1.69}$$

Se introduciamo l'elemento di linea come un vettore covariante

$$dx = dx_i \omega^i \quad i = 1, \cdots n \tag{1.70}$$

possiamo introdurre la distanza infinitesima tra due punti usando l'inverso del tensore metrico:

$$ds^2 = g^{-1}(dx, dx) = g^{-1}(dx_i \omega^i, dx_j \omega^j) = g^{ij} dx_i dx_j \tag{1.71}$$

nel caso in cui

$$ds^2 = \sum_i dx_i dx_i \tag{1.72}$$

(cioe' $g_{ij} = \delta_{ij}$) si dice che si ha una metrica euclidea.

Un altro tensore importante e' il cosi' detto tensore di Ricci Levi-Civita, che puo' essere definito a partire dall'elemento di volume in uno spazio n-dimensionale

$$dV = \epsilon^{i_1 \cdots i_n} dx^1_{i_1} \cdots dx^n_{i_n} \tag{1.73}$$

Il tensore $\epsilon^{i_1 \cdots i_n}$ e' definito essere zero quando una o piu' coppie di indici sono uguali, e' completamente antisimmetrico ed e' uguale a $+1$ quando gli indici sono in una permutazione pari rispetto alla permutazione fondamentale $(1, 2, \cdots, n)$. Si vede allora facilmente che data una matrice $A^j_{\cdot i}$, il tensore di Ricci Levi-Civita soddisfa la relazione

$$\epsilon^{i_1 \cdots i_n} A^{j_1}_{\cdot i_1} \cdots A^{j_n}_{\cdot i_n} = \epsilon^{j_1 \cdots j_n} \det A \tag{1.74}$$

Le proprietà di trasformazione di questo tensore sono

$$\epsilon^{i_1 \cdots i_n} \to \tilde{\Lambda}^{i_1}_{\cdot j_1} \cdots \tilde{\Lambda}^{i_n}_{\cdot j_n} \epsilon^{j_1 \cdots j_n} = \det \tilde{\Lambda} \epsilon^{i_1 \cdots i_n} \tag{1.75}$$

Appendice. Alcune proprietá del tensore di Ricci ϵ^{ijk} in $\mathbb{R}^3$.

Se $\vec{e}_i, i = 1, 2, 3$ sono i versori di una terna possiamo porre

$$\epsilon^{ijk} = (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k \tag{1.76}$$

Il tensore ϵ^{ijk} é invariante sotto rotazioni in R^3 e cambia segno sotto inversioni spaziali; é quindi uno pseudotensore. Vale inoltre

$$\begin{aligned}
\epsilon^{ijk}\epsilon^{ijk} &= 3! \\
\epsilon^{ijk}\epsilon^{ijl} &= 2\delta^{kl} \\
\epsilon^{ijk}\epsilon^{iml} &= \delta^{jm}\delta^{kl} - \delta^{jl}\delta^{km}
\end{aligned} \tag{1.77}$$

Il prodotto vettoriale tra due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ puó scriversi come

$$(v \times w)^i = \epsilon^{ijk} v^j w^k \tag{1.78}$$

Inoltre si verifica

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v} \tag{1.79}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}))^i &= \epsilon^{ijk} \partial_j (\vec{\nabla} \times \vec{v})^k \\
&= \epsilon^{ijk} \partial_j \epsilon^{klm} \partial_l v^m \\
&= (\delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl}) \partial_j \partial_l v^k \\
&= \partial_i (\partial_k v^k) - \nabla^2 v^i
\end{aligned} \tag{1.80}$$

2 Rappresentazione quadridimensionale delle trasformazioni di Lorentz

Tutti i fenomeni della natura avvengono nello spazio e nel tempo. Ogni fenomeno è una successione di *eventi*, ovvero ciò che succede in un dato istante in un punto dello spazio. Lo studio dei fenomeni fisici è possibile con riferimento ad un dato sistema di riferimento. Particolari sistemi di riferimento sono quelli *inerziali*, ovvero quelli rispetto ai quali vale il *principio di inerzia*. E' noto dalla meccanica classica che le equazioni della meccanica newtoniana rimangono inalterate passando da un sistema di riferimento inerziale ad un altro. Ciò non significa che le grandezze fisiche rimangono inalterate ma piuttosto che le stesse equazioni differenziali legano tra loro le stesse grandezze misurate in ciascun sistema. Le equazioni che mantengono la loro forma rispetto alle trasformazioni di coordinate sono dette *covarianti*.

Le corrispondenti trasformazioni, le trasformazioni di Galileo, sono espresse (nel caso in cui un sistema trasli rispetto all'altro lungo l'asse x con velocità v) da

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \tag{2.1}$$

Ovvero nel caso generale

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \quad t' = t \tag{2.2}$$

La legge di composizione delle velocità è

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} \tag{2.3}$$

se $\vec{u} = d\vec{r}/dt$.

L'assunzione base della teoria della Relatività Speciale è che il *principio di relatività*, ovvero quello secondo cui i fenomeni fisici sono descritti dalle stesse leggi in tutti i sistemi di riferimento inerziali, vale per tutti i fenomeni e non solo quelli meccanici.

Ora il sistema delle equazioni di Maxwell cambia forma sotto le trasformazioni di Galileo, cioè le equazioni di Maxwell non sono covarianti rispetto a tali trasformazioni.

D'altra parte è una semplice conseguenza delle equazioni di Maxwell la proprietà delle onde elettromagnetiche di propagarsi nel vuoto con velocità c indipendentemente dalla velocità della sorgente, in contraddizione con la legge di composizione classica delle velocità (2.3).

Questo porta ad enunciare il secondo principio della Relatività Speciale (o della *costanza della velocità* della luce), ovvero quello secondo cui la luce nel vuoto si propaga con velocità pari a c in tutti i sistemi inerziali.

Se consideriamo la propagazione di un' onda, in un sistema inerziale S, partita da $x = 0$ a $t = 0$, il fronte d'onda raggiunge un punto di coordinate (x, y, z) al tempo t tale che

$$0 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{2.4}$$

In modo simile la propagazione del fronte d'onda nel sistema S', che coincide al tempo $t' = t = 0$ col sistema S, è descritta da

$$0 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \tag{2.5}$$

Tenendo conto dell'isotropia e dell'omogeneità dello spazio è naturale assumere una relazione lineare tra i due insiemi di coordinate. Supponendo che il sitema S' trasli con velocità v lungo l'asse x, è possibile determinare la trasformazione tra i due insiemi di coordinate

$$\begin{array}{rcl} t' &=& \gamma(t - \frac{v}{c}x) \\ x' &=& \gamma(x - vt) \\ y' &=& y \\ z' &=& z \end{array}$$

Queste sono un esempio particolare delle trasformazioni di Lorentz. Queste trasformazioni lasciano invariata in generale la forma

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{2.6}$$

Possiamo allora riassumere: in un sistema di riferimento inerziale S un evento arbitrario é caratterizzato dai quattro numeri (t, x, y, z). In un altro sistema S' lo stesso evento sará caratterizzato da altri quattro numeri (t', x', y', z'). Se assumiamo che le origini dei due sistemi cartesiani coincidano al tempo $t = t' = 0$ la connessione tra le coordinate spaziotemporali degli eventi é data da una trasformazione omogenea di Lorentz, cioé una trasformazione lineare che lascia invariato

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \tag{2.7}$$

Siamo quindi portati a considerare uno spazio quadridimensionale con coordinate

$$(x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z) \tag{2.8}$$

e metrica pseudo-Euclidea definita dalla forma quadratica

$$x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} \equiv x^{0^2} - \vec{x}^2 \tag{2.9}$$

Possiamo riscrivere la (2.9) come

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \tag{2.10}$$

dove

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

sono le componenti del tensore metrico e $g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu$. Ricordiamo che stiamo utilizzando la convenzione sommatoria (indici uguali ripetuti sottintendono una sommatoria). Useremo indici greci per indici che assumono i valori $0, 1, 2, 3$ e indici latini per indici che assumono i valori $1, 2, 3$. Dati due vettori x^μ e y^ν, il prodotto scalare in questo spazio é definito da

$$(x, y) \equiv g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{2.12}$$

Se adesso indichiamo la trasformazione delle componenti controvarianti con $x'^\mu = \Lambda^\mu_{\cdot\nu} x^\nu$, avremo (notiamo che la matrice g non cambia con il riferimento)

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\rho\sigma} x'^\rho x'^\sigma = g_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_{\cdot\mu} \Lambda^\sigma_{\cdot\nu} x^\mu x^\nu \tag{2.13}$$

da cui

$$g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_{\cdot\mu} \Lambda^\sigma_{\cdot\nu} \tag{2.14}$$

Ricordiamo che nella notazione $\Lambda^\nu_{\cdot\mu}$, ν individua le righe e μ le colonne della matrice Λ, ed in conseguenza $(\Lambda^T)^{\cdot\nu}_\mu = \Lambda^\nu_{\cdot\mu}$. E' possibile quindi scrivere la relazione precedente nella forma matriciale

$$\Lambda^T g \Lambda = g \tag{2.15}$$

Segue da (2.15) e da $\det g = -1$ che $\det \Lambda = \pm 1$.

Esempio Una trasformazione di Lorentz speciale che corrisponde alla trasformazione da un sistema S ad un sistema S' che sta traslando con velocitá $v = \beta c$ lungo l'asse x é data, in queste notazioni, da

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

dove

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{2.17}$$

Possiamo quindi rappresentare la generale trasformazione di Lorentz come una trasformazione lineare

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\cdot\nu} x^\nu \tag{2.18}$$

che lascia invariato la (2.9) o il prodotto scalare (2.12).

Le componenti x^μ sono le componenti controvarianti, mentre la componenti covarianti sono definite da

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{2.19}$$

dove $g_{\mu\nu}$ sono le componenti del tensore metrico inverso. Quindi $x^0 = x_0$ e $x^i = -x_i$ quando $i = 1, 2, 3$. Utilizzando le componenti covarianti il prodotto scalare puó anche riscriversi come

$$(x, y) = x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu \tag{2.20}$$

Utilizzando il tensore metrico possiamo trasformare un tensore controvariante in covariante

$$T_{\alpha\beta\cdots\gamma} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \cdots g_{\gamma\rho} T^{\mu\nu\cdots\rho} \tag{2.21}$$

Le proprietà di trasformazione dei vettori covarianti sono

$$x'_{\mu} = g_{\mu\nu} x'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\cdot\rho} x^{\rho} = \Lambda_{\mu}^{\cdot\rho} x_{\rho} \tag{2.22}$$

dove abbiamo definito la matrice

$$\Lambda_{\mu}^{\cdot\rho} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\cdot\sigma} g^{\sigma\rho} \tag{2.23}$$

La matrice $\Lambda_{\mu}^{\cdot\rho}$ è tale che, per la (2.14),

$$\Lambda_{\mu}^{\cdot\rho} \Lambda^{\mu}_{\cdot\nu} = g^{\rho}_{\nu} \tag{2.24}$$

Come conseguenza della (2.24) si ha

$$x'_{\mu} y'^{\mu} = x_{\mu} y^{\mu} \tag{2.25}$$

per ogni coppia di quadrivettori.

Possiamo quindi invertire la (2.18), moltiplicando per $\Lambda_{\mu}^{\cdot\rho}$ e sommando su μ

$$\Lambda_{\mu}^{\cdot\rho} x'^{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\cdot\rho} \Lambda^{\mu}_{\cdot\nu} x^{\nu} \tag{2.26}$$

ovvero, utilizzando la (2.24),

$$x^{\rho} = \Lambda_{\mu}^{\cdot\rho} x'^{\mu} \tag{2.27}$$

Consideriamo l'operatore

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tag{2.28}$$

Sotto trasformazioni di Lorentz

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \to \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\mu}^{\cdot\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \tag{2.29}$$

Quindi, confrontando con (2.22) si vede che $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ é un quadrivettore covariante che indicheremo con

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tag{2.30}$$

Useremo quindi gli operatori

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = (\frac{\partial}{\partial x^{0}}, \vec{\nabla}) \tag{2.31}$$

$$\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = (\frac{\partial}{\partial x^{0}}, -\vec{\nabla}) \tag{2.32}$$

La quadridivergenza di un quadrivettore v^{μ} é quindi invariante

$$\partial_{\mu} v^{\mu} = \frac{\partial v^{0}}{\partial x^{0}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \tag{2.33}$$

Nel seguito utilizzeremo anche l'operatore *d'Alembertiano*

$$\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{2.34}$$

che é anch'esso invariante.

Questo spazio quadridimensionale con metrica pseudoeuclidea é stato introdotto per primi da Poincaré (1906) e Minkowski (1909).

Un quadrivettore é detto di tipo *tempo* se $x^2 \equiv g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu > 0$, di tipo *luce* se $x^2 = 0$ e di tipo *spazio* se $x^2 < 0$.

3 Cinematica relativistica

Consideriamo adesso il moto di una particella relativistica di massa m nello spazio-tempo. Possiamo usare una rappresentazione parametrica della sua traiettoria come

$$x^\mu(s) \tag{3.1}$$

dove s é la lunghezza della curva descritta dalla particella nello spazio tempo

$$s = \int ds \tag{3.2}$$

dove

$$ds^2 = dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} = c^2 dt^2 (1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}) \tag{3.3}$$

Definiamo a partire da ds il *tempo proprio* della particella, ovvero il tempo misurato da un orologio che segue il moto della particella,

$$d\tau = \frac{ds}{c} = (1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2})^{1/2} dt = \frac{1}{\gamma} dt \tag{3.4}$$

dove

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \tag{3.5}$$

Poiché $d\tau$ é un invariante rispetto a trasformazioni di Lorentz e dx^μ un quadrivettore (controvariante), definiamo come *quadrivelocitá*

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{3.6}$$

Le quattro componenti della quadrivelocitá sono

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \gamma c \tag{3.7}$$

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \gamma \frac{dx^i}{dt} \tag{3.8}$$

dove abbiamo fatto uso della (3.4). Dalla definizione di quadrivelocitá segue inoltre

$$u_\mu u^\mu = \gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = c^2 \tag{3.9}$$

La quadrivelocitá é quindi un vettore tangente alla traiettoria della particella, di tipo tempo e di norma costante. Pertanto

$$u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = 0 \tag{3.10}$$

Il quadrivettore

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} \tag{3.11}$$

é detto *quadriaccelerazione*.

Le componenti della quadriaccelerazione risultano essere, come segue dalla (3.11), usando (3.7) e (3.8),

$$w^0 = \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c} \tag{3.12}$$

$$\vec{w} = \gamma^2 \vec{a} + \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} \tag{3.13}$$

Nel sistema di riposo della particella $\vec{v} = 0$ e quindi

$$u^\mu_R = (c; \vec{0}) \tag{3.14}$$

$$a^\mu_R = (0; \vec{a}_R) \tag{3.15}$$

La quadriaccelerazione é quindi un vettore di tipo spazio, ortogonale alla quadrivelocità, come risulta dalla (3.10)

$$w^\mu u_\mu = 0 \tag{3.16}$$

Il *quadrimomento* é definito come un quadrivettore proporzionale alla quadrivelocitá:

$$p^\mu = m u^\mu \tag{3.17}$$

dove m é la massa a riposo della particella (ovvero misurata nel sistema di riposo della particella). Dalla (3.9) segue che

$$p_\mu p^\mu = {p^0}^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \tag{3.18}$$

e quindi il quadrimomento é un vettore di tipo tempo.

Le componenti del quadrimomento sono

$$p^0 = m \gamma c \tag{3.19}$$

e

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} \tag{3.20}$$

L'energia relativistica é definita a partire dalla componente temporale del quadrimomento come

$$E = p^0 c = mc^2\gamma \tag{3.21}$$

Utilizzando la (3.18) si ottiene la relazione tra energia e momento

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \tag{3.22}$$

Quindi a riposo la particella ha una energia pari a mc^2.

Con la definizione (3.21), nel limite non relativistico $v << c$ si ottiene

$$E \sim mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{3.23}$$

ovvero la somma dell'energia cinetica non relativistica e dell'energia di riposo.

Nella dinamica relativistica vale il principio di conservazione del quadrimomento. Questa legge di conservazione insieme alla relazione tra massa ed energia é ormai verificata quotidianamente negli esperimenti di collisione e nei processi di decadimento di particelle ad alta energia.

La generalizzazione della legge di Newton é

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \mathcal{F}^\mu \tag{3.24}$$

dove $\mathcal{F}^\mu$ é la *quadriforza*. Dalla (3.16) segue che la quadriforza deve esser ortogonale alla quadrivelocitá

$$\mathcal{F}^\mu u_\mu = 0 \tag{3.25}$$

La (3.24) é il primo esempio di una legge scritta in forma covariante ovvero come uguaglianza tra due quantitá tensoriali, in questo caso vettori. In un altro sistema inerziale la legge mantiene la stessa forma, ma con i quadrivettori trasformati con la trasformazione di Lorentz corrispondente

$$\frac{dp'^\mu}{d\tau} = \mathcal{F}'^\mu \tag{3.26}$$

con

$$p'^\mu = \Lambda^\mu_{\cdot\nu} p^\nu \tag{3.27}$$

e analogamente per $\mathcal{F}'$.

Vedremo in seguito come applicazione dell'equazione di Newton (3.24), l'equazione di una particella di carica e in un campo elettromagnetico.

4 Equazioni di Maxwell in forma covariante (gauge di Lorentz)

E' un risultato sperimentale l'invarianza della carica elettrica rispetto a trasformazioni di Lorentz, ovvero l'indipendenza della carica di una particella dalla sua velocitá. Se ρ denota la densitá di carica in un volume d^3x, sará

$$\rho d^3x = \rho' d^3x' \tag{4.1}$$

se d^3x e d^3x' sono gli elementi di volume in S e S' e ρ e ρ' le corrispondenti densitá di carica. Consideriamo allora la quantitá $j^\mu = c\rho\frac{dx^\mu}{dx^0}$. Nel sistema di riferimento S' sará

$$j'^\mu = c\rho'\frac{dx'^\mu}{dx'^0} = c\rho' d^3x' \frac{dx'^\mu}{dx'^0 d^3x'} = c\rho d^3x \frac{dx'^\mu}{dx^0 d^3x} = c\rho\frac{dx'^\mu}{dx^0} = \Lambda^\mu_{\cdot\nu} j^\nu \tag{4.2}$$

dove abbiamo fatto uso della (4.1) e della invarianza dell' elemento di volume nello spazio quadridimensionale rispetto a trasformazioni di Lorentz

$$d^4x' \equiv dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 = |\det\Lambda| d^4x = d^4x \tag{4.3}$$

Pertanto j^μ é un quadrivettore. Le sue componenti sono

$$j^0 = \rho c \tag{4.4}$$

e la densità di corrente

$$\vec{j} = \rho\vec{v} \tag{4.5}$$

Vale

$$j_\mu j^\mu = \rho^2(c^2 - v^2) \tag{4.6}$$

Se quindi indichiamo con ρ_R la densitá di carica nel sistema di riposo, dalla (4.6) segue

$$\rho_R^2 c^2 = \rho^2(c^2 - v^2) \tag{4.7}$$

e pertanto

$$\rho = \gamma\rho_R \tag{4.8}$$

Cominciamo col considerare l'equazione di continuitá

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \tag{4.9}$$

Questa puó riscriversi nella forma

$$\frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \partial_k j^k = 0 \tag{4.10}$$

ovvero nella forma covariante

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{4.11}$$

In conclusione dall'invarianza della carica elettrica rispetto a trasformazioni di Lorentz segue che j^μ é un quadrivettore e l'equazione di continuità è scritta in forma invariante.

Consideriamo le equazioni di Maxwell nel vuoto, nel sistema di unitá di Heaviside-Lorentz:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{1}{c}\vec{j}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Dalla seconda equazione di Maxwell segue

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{4.13}$$

dove $\vec{A}$ é il potenziale vettore. Sostituendo la (4.13) nella prima equazione di Maxwell si ottiene

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \tag{4.14}$$

e pertanto

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{4.15}$$

dove φ é il *potenziale scalare*. Quindi

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\
\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Notiamo che φ e $\vec{A}$ non sono univocamente determinati. Infatti se facciamo la trasformazione

$$\begin{aligned}
\vec{A} \to \vec{A}' &= \vec{A} - \vec{\nabla}\chi \\
\varphi \to \varphi' &= \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

con $\chi = \chi(t, \vec{x})$ funzione arbitraria, i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ rimangono invariati. Queste trasformazioni si chiamano *trasformazioni di gauge*.

Sostituendo le (4.16) nelle ultime due equazioni di Maxwell, tenuto conto che

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A} \tag{4.18}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\vec{A} &= -\rho \\
\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} &= -\frac{1}{c}\vec{j} + \vec{\nabla}(\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{A})
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Possiamo utilizzare l'invarianza rispetto a trasformazioni di gauge per imporre una condizione sui potenziali, il cosiddetto *gauge di Lorentz*

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{A} = 0 \tag{4.20}$$

In questo gauge le (4.19) divengono

$$\begin{aligned} \Box\varphi &= \rho \\ \Box\vec{A} &= \frac{1}{c}\vec{j} \end{aligned} \tag{4.21}$$

dove abbiamo utilizzato l'operatore d'Alembertiano (2.34). Poiché l'operatore d'Alembertiano é invariante rispetto a trasformazioni di Lorentz, essendo $(c\rho, \vec{j})$ le componenti di un quadrivettore, anche $(\varphi, \vec{A})$ saranno le componenti di un quadrivettore che indicheremo con

$$A^\mu = (\varphi, \vec{A}) \tag{4.22}$$

Quindi le equazioni (4.21) si riscrivono nella forma manifestamente covariante

$$\Box A^\mu = \frac{1}{c}j^\mu \tag{4.23}$$

e la condizione gauge di Lorentz (4.20), ricordando (2.33),

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{4.24}$$

ovvero in una forma manifestamente invariante. Le trasformazioni di gauge (4.17) si riscrivono in modo compatto come

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu\chi \tag{4.25}$$

Infatti, per $\mu = 0$, la (4.25) diventa

$$\begin{aligned} \varphi \to \varphi' &= \varphi + \partial^0\chi \\ &= \varphi + \partial_0\chi \\ &= \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi \end{aligned} \tag{4.26}$$

Per $\mu = i$,

$$\begin{aligned} A^i \to (A')^i &= A^i + \partial^i\chi \\ &= A^i - \partial_i\chi \end{aligned} \tag{4.27}$$

ovvero la componente i-esima della trasformazione (4.17) su $\vec{A}$.

Notiamo anche che per trovare la trasformazione che porta nel gauge di Lorentz partendo da un quadripotenziale A^μ, tale che $\partial_\mu A^\mu = -\psi$ basta fare una trasformazione (4.25) con $\Box\chi = -\psi$. Notiamo inoltre che, all'interno del gauge di Lorentz, una trasformazione di gauge (4.25) con $\Box\chi = 0$ mantiene ancora all'interno del gauge di Lorentz.

5 Equazioni di Maxwell in forma covariante

Consideriamo poi il tensore del secondo ordine

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{5.1}$$

Questo é invariante sotto le trasformazioni di gauge (4.25),

$$F^{\mu\nu} \to F^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu \chi - \partial^\nu \partial^\mu \chi = F^{\mu\nu} \tag{5.2}$$

Inoltre é un tensore antisimmetrico

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \tag{5.3}$$

e quindi $F^{00} = F^{ii} = 0$ per $i = 1, 2, 3$. Si ha inoltre

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\partial_i A^j + \partial_j A^i = -\epsilon^{ijk} B^k \tag{5.4}$$

dove ϵ^{ijk} é il tensore di Ricci, tensore antisimmetrico nello scambio di ogni coppia di indici, con la convenzione $\epsilon^{123} = 1$. Quindi $F^{12} = -B^3 = -B_z$, $F^{23} = -B^1 = -B_x$ e $F^{31} = -B^2 = -B_y$. Analogamente

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \partial_i A^0 + \partial^0 A^i = -E^i \tag{5.5}$$

Quindi i campi elettrico e magnetico sono le sei componenti di questo tensore antisimmetrico

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Utilizzando questo tensore é possibile riscrivere le ultime due equazioni di Maxwell in un gauge generico nella forma covariante

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\nu \tag{5.7}$$

e le prime due nella forma

$$\partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} + \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0 \tag{5.8}$$

in cui μ, ν, ρ sono tre dei quattro numeri $0, 1, 2, 3$.

Verifichiamo le (5.7). Ripartiamo dalle (4.19) che possiamo riscrivere nella forma

$$\Box A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \frac{1}{c} j^\nu \tag{5.9}$$

e quindi

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\nu \tag{5.10}$$

Verifichiamo la (5.8) per $\mu = 0, \nu = i, \rho = j$; e'

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial^0 F^{ij} + \partial^i F^{j0} + \partial^j F^{0i} \\
&= -\frac{1}{c}\epsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial t}B^k - \partial_i E^j + \partial_j E^i
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

Moltiplicando per ϵ^{ijl} e sommando su i, j ricordando che

$$
\epsilon^{ijl}\epsilon^{ijk} = 2\delta^{lk} \tag{5.12}
$$

si ottiene

$$
0 = -2\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B^l - \epsilon^{ijl}(\partial_i E^j - \partial_j E^i) = -2\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B^l - 2\epsilon^{ijl}\partial_i E^j = -2\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B^l - 2(\vec{\nabla}\times\vec{E})^l \tag{5.13}
$$

da cui segue la componente $l-$esima della prime delle equazioni (4.12). In modo analogo si verificano le altre. Scegliamo $\mu = i, \nu = j, \rho = k$; abbiamo

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial^i F^{jk} + \partial^j F^{ki} + \partial^k F^{ij} \\
&= \epsilon^{jkl}\partial^i B^l + \epsilon^{kil}\partial^j B^l + \epsilon^{ijl}\partial^k B^l
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

Moltiplicando per ϵ^{jki} e sommando su i si ottiene

$$
\partial_i B^i = 0 \tag{5.15}
$$

ovvero la seconda equazione di Maxwell.

La eq.(5.8) può anche esser riscritta utilizzando il *tensore duale* di campo elettromagnetico, definito come

$$
\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \tag{5.16}
$$

Si ha

$$
\mathcal{F}^{0i} = \frac{1}{2}\epsilon^{0i\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}F_{jk} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\epsilon^{jkl}B^l = -B^i \tag{5.17}
$$

e

$$
\mathcal{F}^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ij\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\epsilon^{ij0k}F_{0k} + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk0}F_{k0} = -\epsilon^{ijk}F^{0k} = \epsilon^{ijk}E^k \tag{5.18}
$$

Ovvero le componenti del tensore duale si ottengono mandando $\vec{E} \to \vec{B}$ e $\vec{B} \to -\vec{E}$.

L'eq. (5.8) in termini del tensore duale diventa

$$
\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0 \tag{5.19}
$$

6 Trasformazioni di Lorentz del campo elettromagnetico

Dopo aver identificato i campi elettrico e magnetico come le componenti del tensore antisimmetrico $F^{\mu\nu}$ possiamo facilmente studiarne le trasformazioni di Lorentz. In generale sarà

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\cdot\alpha}\Lambda^{\nu}_{\cdot\beta}F^{\alpha\beta} \tag{6.1}$$

se Λ denota la trasformazione di Lorentz. Se Λ è la trasformazione speciale (2.16), ovvero un boost lungo l'asse x con velocità βc, avremo

$$E'_x = F'^{10} = \Lambda^{1}_{\cdot\alpha}\Lambda^{0}_{\cdot\beta}F^{\alpha\beta} = \Lambda^{1}_{\cdot 0}\Lambda^{0}_{\cdot 1}F^{01} + \Lambda^{1}_{\cdot 1}\Lambda^{0}_{\cdot 0}F^{10} = E_x \tag{6.2}$$

$$E'_y = F'^{20} = \Lambda^{2}_{\cdot\alpha}\Lambda^{0}_{\cdot\beta}F^{\alpha\beta} = \gamma(E_y - \beta B_z) \tag{6.3}$$

$$E'_z = F'^{30} = \Lambda^{3}_{\cdot\alpha}\Lambda^{0}_{\cdot\beta}F^{\alpha\beta} = \gamma(E_z + \beta B_y) \tag{6.4}$$

Analogamente

$$B'_x = B_x \tag{6.5}$$

$$B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z) \tag{6.6}$$

$$B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) \tag{6.7}$$

Le trasformazioni inverse sono trovate mandando $\beta \to -\beta$.

Se il sistema S' si muove con velocità con direzione arbitraria $\vec{\beta}c$ rispetto al sistema S le leggi di trasformazione divengono

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \\ \vec{B}' &= \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \end{aligned} \tag{6.8}$$

Come conseguenza di queste leggi, un campo, che in un sistema di riferimento appare come un campo puramente elettrico o puramente magnetico, in un altro sistema di riferimento e' una miscela di campo elettrico e magnetico.

7 Equazione di Lorentz in forma covariante

Concludiamo scrivendo l'equazione di Lorentz per una particella di carica e in un campo elettromagnetico esterno. Possiamo costruire la quadriforza, $\mathcal{F}^{\alpha}$, utilizzando la proprietà (3.16), che riscriviamo

$$\mathcal{F}^{\alpha}u_{\alpha} = 0 \tag{7.1}$$

Se utilizziamo il tensore $F^{\alpha\beta}$, possiamo costruirci il quadrivettore

$$F^{\alpha\beta}u_{\beta} \tag{7.2}$$

Data l'antisimmetria di $F^{\alpha\beta}$, la (7.1) è soddisfatta:

$$F^{\alpha\beta}u_\beta u_\alpha = F^{\beta\alpha}u_\alpha u_\beta = -F^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = -F^{\alpha\beta}u_\beta u_\alpha = 0 \tag{7.3}$$

Se consideriamo la parte spaziale di $F^{\alpha\beta}u_\beta$ è

$$F^{k\beta}u_\beta = E^k c\gamma - F^{kl}\gamma v^l = \gamma[E^k c + \epsilon^{klm}B^m v^l] = \gamma[E^k c + (\vec{v}\times\vec{B})^k] \tag{7.4}$$

ovvero, a parte il fattore $e/c\gamma$ la forza di Lorentz non relativistica. La quadriforza, ovvero il quadrivettore tale che, nel limite non relativistico, le sue componenti spaziali si riducono alla forza di Lorentz, è

$$\frac{e}{c}F^{\alpha\beta}u_\beta \tag{7.5}$$

e quindi l'equazione di Lorentz relativistica

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{e}{c}F^{\alpha\beta}u_\beta \tag{7.6}$$

Le componenti spaziali danno

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e[\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}] \tag{7.7}$$

dove $\vec{p}$ è il momento relativistico della particella; la componente temporale

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{e}{c}F^{0i}u_i \tag{7.8}$$

da cui segue

$$\frac{dE}{dt} = e\vec{E}\cdot\vec{v} \tag{7.9}$$

dove E è l'energia relativistica della particella. Le due eq. (7.7) e (7.9) sono le equazioni che descrivono il moto di una particella carica relativistica in un campo elettromagnetico esterno.

8 Lagrangiana per una particella relativistica

Se vogliamo una formulazione covariante l'azione dovrà essere invariante rispetto a trasformazioni di Lorentz, quindi ricordando la relazione del tempo proprio

$$dt = \gamma d\tau \tag{8.1}$$

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dtL = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\gamma L \tag{8.2}$$

essendo τ invariante anche γL dovrà esserlo. Per una particella libera L è funzione solo della velocità, e quindi, dovrendo essere invariante, γL sarà funzione dell'unico invariante $u^\mu u_\mu = c^2$. Quindi γL è costante, pertanto $L \sim \gamma^{-1}$ e

$$\begin{aligned} S &= -mc^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} && (8.3) \\ &= -mc \int \sqrt{(dx^0)^2 - (d\vec{x})^2} && (8.4) \end{aligned}$$

Dalla () segue

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\gamma\vec{v} \tag{8.5}$$

e quindi otteniamo le equazioni di una particella relativistica libera in forma non covariante

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0 = \frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) \tag{8.6}$$

Osserviamo che la azione si puó riscrivere nella forma

$$S = -mc \int d\sigma \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu(\sigma)\dot{x}^\mu(\sigma)} \tag{8.7}$$

in termini di un parametro arbitrario σ con

$$\dot{x}^\mu(\sigma) = \frac{dx^\mu(\sigma)}{d\sigma} \tag{8.8}$$

La relazione col tempo proprio è

$$cd\tau = \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu(\sigma)\dot{x}^\mu(\sigma)}d\sigma \tag{8.9}$$

e quindi

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{d}{d\sigma} \tag{8.10}$$

con'

$$\sqrt{\dot{x}^2} \equiv \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu(\sigma)\dot{x}^\mu(\sigma)} \tag{8.11}$$

Notiamo che questa azione é invariante per riparametrizzazione

$$\sigma \to \sigma' = f(\sigma) \tag{8.12}$$

proprietà riflessa dalla forma della lagrangiana, funzione omogenea di primo grado delle derivate rispetto ad s. Proviamo a ricavare le equazioni di EL:

$$\frac{d}{d\sigma}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \tag{8.13}$$

ovvero

$$\frac{d}{d\sigma}(m\frac{c\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}}^2}) = 0 \tag{8.14}$$

Possiamo quindi identificare

$$u^\mu = \frac{c\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}}^2} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{8.15}$$

dato che

$$u^\mu u_\mu = c^2 \tag{8.16}$$

Pertanto

Moltiplicando la (8.14) per $c/\sqrt{\dot{x}^2}$ otteniamo

$$m\frac{d^2}{d\tau^2}x^\mu(\tau) = 0 \tag{8.17}$$

Possiamo adesso scrivere la lagrangiana di una particella carica relativistica in interazione col potenziale elettromagnetico richiedendo l'invarianza per riparametrizzazione, l'invarianza di Lorentz e l'invarianza di gauge. Cè un solo termine di interazione che possiamo scrivere che è

$$\dot{x}^\mu A_\mu \tag{8.18}$$

L'azione, fissando la costante del termine di interazione in modo da ottenere l'equazione di Lorentz è

$$S = -\int d\sigma(mc\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu(\sigma)\dot{x}^\mu(\sigma)} + \frac{e}{c}\dot{x}^\mu A_\mu) \tag{8.19}$$

Quindi

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = -\frac{e}{c}\dot{x}^\rho \partial_\mu A_\rho \tag{8.20}$$

$$\frac{d}{d\sigma}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{d}{d\sigma}(-mu_\mu - \frac{e}{c}A_\mu) = -m\frac{d}{d\sigma}u_\mu - \frac{e}{c}\partial_\nu A_\mu \dot{x}^\nu \tag{8.21}$$

Quindi

$$\frac{d}{d\sigma}mu^\mu = \frac{e}{c}F^{\mu\rho}\dot{x}_\rho \tag{8.22}$$

ovvero rispetto al tempo proprio

$$m\frac{d}{d\tau}u^\mu = \frac{e}{c}F^{\mu\rho}u_\rho \tag{8.23}$$

dove adesso $\dot{x}_\rho$ denota la derivata rispetto a τ.

Se $\sigma = t$ si ottiene

$$\frac{d}{dt}m\gamma\vec{v} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} \tag{8.24}$$

Riferimenti bibliografici

[1] R. Abraham and J. E. Marsden, Foundation of Mechanics, W. A. Benjamin, New York, 1967

[2] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, J. Wiley and sons, New York, 1975