

# **Metodi Matematici (Variabile complessa)**

Daniele Dominici

Dipartimento di Fisica, Università di Firenze, e INFN  
Via Sansone 1, 50019 Sesto F. (FI), Italia

<http://quinto.fi.infn.it/dominici/>

# Indice

<b>1 Funzioni analitiche</b>	<b>3</b>
1.1 Notazioni e preliminari . . . . .	3
1.2 Serie di potenze . . . . .	6
1.3 Funzioni analitiche e olomorfe . . . . .	7
1.4 Le funzioni esponenziale, logaritmo, potenza . . . . .	10
<b>2 Integrazione nel piano complesso</b>	<b>12</b>
2.1 Curve e cammini . . . . .	12
2.2 Integrali su cammini . . . . .	12
2.3 Teorema di Goursat . . . . .	16
2.4 Indice . . . . .	19
2.5 Formula Integrale di Cauchy . . . . .	21
2.6 Sviluppo di Taylor . . . . .	22
2.7 Sviluppo di Laurent . . . . .	23
2.8 Singolarità . . . . .	25
2.9 Zeri di una funzione analitica . . . . .	27
<b>3 Formulazione generale del teorema di Cauchy</b>	<b>29</b>
3.1 Residuo . . . . .	31
3.2 Lemma di Jordan . . . . .	33
3.3 Teorema dell'indicatore logaritmico . . . . .	34
3.4 Problema di Dirichlet . . . . .	35
3.5 Problema di Dirichlet per il disco e per il semipiano . . . . .	38
<b>4 Funzioni intere e meromorfe</b>	<b>41</b>
4.1 Fattorizzazione . . . . .	41
4.2 La funzione Gamma di Eulero . . . . .	42
<b>5 Trasformazioni conformi</b>	<b>44</b>
<b>6 Trasformate di Fourier</b>	<b>47</b>
6.1 Notazioni . . . . .	47
6.2 Trasformata di Fourier per funzioni $L^1$ . . . . .	48
6.3 Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	49
6.4 Formula di inversione . . . . .	53
6.5 Prodotto di convoluzione . . . . .	54
6.6 Trasformata di Fourier per funzioni $L^2$ . . . . .	56
6.7 Teorema dell'interpolazione . . . . .	57
<b>7 Trasformate di Laplace</b>	<b>60</b>
7.1 Notazioni e proprietà . . . . .	60
7.2 Formula di inversione . . . . .	63
7.3 Prodotto di convoluzione . . . . .	64
7.4 Sviluppi asintotici . . . . .	65

# 1 Funzioni analitiche

## 1.1 Notazioni e preliminari

$\mathbb{R}(\mathbb{C})$  indica l'insieme dei numeri reali (complessi).  $\mathbb{C}$  è uno spazio metrico con la metrica definita dal modulo di un numero complesso. Ricordiamo la forma trigonometrica o polare di un numero complesso  $z = x + iy = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .  $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  denota il modulo,  $\varphi = \arctan y/x$  l'argomento e  $i$  l'unità immaginaria ( $i^2 = -1$ ). Indicheremo con  $\bar{z} = x - iy$  il coniugato di  $z$ , con  $x = \operatorname{Re} z$  ( $y = \operatorname{Im} z$ ) la parte reale (immaginaria) del numero complesso.

Per molte applicazioni è utile estendere  $\mathbb{C}$  introducendo il simbolo  $\infty$  per rappresentare l'infinito. La sua proprietà è data da  $a + \infty = \infty + a = \infty$  e  $\infty a = a\infty = \infty$  per ogni  $a \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{C}$ . Sarà inoltre  $a/\infty = 0$  e  $a/0 = \infty$ . Nella rappresentazione dei numeri complessi nel piano, il simbolo  $\infty$  corrisponde al punto all'infinito. Si parla allora di *piano complesso esteso*.

Proiezione stereografica. E' possibile introdurre un modello geometrico in cui tutti i punti del piano complesso esteso hanno un punto rappresentativo (Fig. 1). Consideriamo una sfera unitaria  $S$  con centro nell'origine la cui equazione nello spazio tridimensionale è

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad (1.1)$$

Ad ogni punto  $P = (x_1, x_2, x_3)$  della sfera (sfera di Riemann) possiamo associare un punto del piano complesso (il piano equatoriale della sfera)

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \quad (1.2)$$

eccetto al polo nord della sfera  $N = (0, 0, 1)$ . Il punto  $z$  si trova nel punto intersezione col piano della retta passante per il polo nord e per il punto  $P$ . Se indichiamo le coordinate di  $z$  con  $(x, y, 0)$  richiedendo che i punti  $N, P, z$  stiano sulla stessa retta si ricava

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{x_2} = \frac{-1}{x_3 - 1} \quad (1.3)$$

da cui

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3} \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3} \quad (1.4)$$

e quindi la eq.(1.2).

La corrispondenza può esser completata associando al polo nord il punto all'infinito. La corrispondenza è uno a uno e vale

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2} \\ x_2 &= \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)} \\ x_3 &= \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \end{aligned}$$

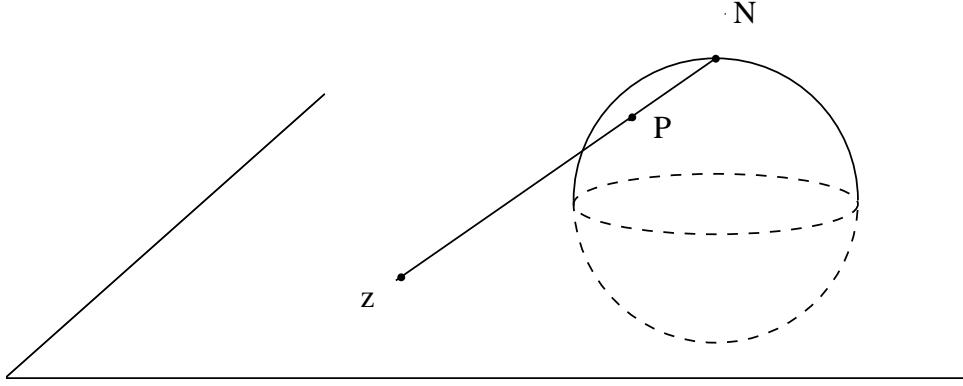


Figura 1: La sfera di Riemann e il piano complesso

Infatti dalla eq.(1.1) segue, utilizzando le eq. (1.3)

$$(x^2 + y^2 + 1)x_3^2 - 2(x^2 + y^2)x_3 + (x^2 + y^2 - 1) = 0 \quad (1.5)$$

cui corrispondono le radici  $x_3 = 1$  cui corrisponde il punto P e la radice

$$x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \quad (1.6)$$

Utilizzando questa radice nelle eq. (1.3) si ottengono le eq. (1.5). L'emisfero  $x_3 < 0$  corrisponde al disco  $|z| < 1$ .

In definitiva abbiamo una corrispondenza uno a uno tra la sfera e  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

#### Topologia del piano complesso e notazioni

Per ogni numero complesso  $z_0$  e  $r \in \mathbb{R}$  positivo, definiamo il *disco (aperto) di raggio r*

$$B(r, z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq |z - z_0| < r\} \quad (1.7)$$

Analogamente indicheremo con  $\overline{B(r, z_0)}$  il *disco chiuso*

$$\overline{B(r, z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq |z - z_0| \leq r\} \quad (1.8)$$

e con  $B_0(r, z_0)$  il disco aperto privato del punto  $z_0$ .

Un sottoinsieme  $S \subseteq \mathbb{C}$  è detto *aperto* se ogni suo punto ha un corrispondente disco  $B(r, z_0)$  che lo contiene e tale che  $B(r, z_0) \subseteq S$ .

Un insieme  $S$  è detto *chiuso* se il suo complemento in  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C} \setminus S$ , è aperto.

Un altro modo di caratterizzare gli insiemi chiusi è quello di introdurre il concetto di punto limite o punto di accumulazione.

Un punto  $z_0$  è un *punto di accumulazione* per un insieme  $S$  se ogni disco centrato in  $z_0$  contiene punti di  $S$  distinti da  $z_0$  ( $z_0$  non appartiene necessariamente ad  $S$ ). E' possibile mostrare che  $S$  è chiuso se e solo se contiene i suoi punti di accumulazione.

Se  $S$  è un sottoinsieme di  $\mathbf{C}$  ( $S \subset \mathbf{C}$ ), indicheremo con  $\text{int}(S)$  l'insieme dei punti interni,  $\partial S$  la frontiera,  $\bar{S}$  la chiusura.

Possiamo caratterizzare  $\text{int}(S)$  come il più grande degli insiemi aperti contenuti in  $S$ . Se esiste esso è l'unione di tutti gli insiemi aperti contenuti in  $S$ .

La *chiusura*  $\bar{S}$  di  $S$  è il più piccolo degli insiemi chiusi che contengono  $S$ . La chiusura è anche l'insieme che ha per elementi i punti di accumulazione di  $S$ .

La *frontiera*  $\partial S = \bar{S} \setminus \text{int}(S)$ .

Un insieme è *connesso* se non può esser rappresentato come unione di due insiemi aperti relativamente disgiunti nessuno dei quali è vuoto.

Un insieme si dice *limitato* se esiste un disco che lo contiene.

$U$  indicherà un aperto.  $\Omega$  indicherà una *regione* (anche *dominio*) ovvero un aperto e connesso di  $\mathbf{C}$ . La proprietà di connessione garantirà l'esistenza di un cammino tra due punti di  $\Omega$ .

### Funzioni

Data una funzione  $f : A \rightarrow B$ ,  $R(f)$  indicherà il *codominio* o *immagine*, ovvero  $R(f) = \{f(x) | x \in A\} \subset B$ .

Sia  $S \subseteq \mathbf{C}$ . Una legge che ad ogni elemento in  $S$  associa un numero complesso è detta *funzione a valori complessi*:

$$f : S \rightarrow \mathbf{C} \quad (1.9)$$

$$z \mapsto f(z) \quad (1.10)$$

Scriveremo anche  $z = x + iy$  e  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  con  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  funzioni reali di due variabili reali. La funzione  $u$  è detta *parte reale* e la  $v$  *parte immaginaria*.

Le operazioni di derivata rispetto alla variabile  $x$  ( $y$ ) saranno denotate con  $\partial_x$  ( $\partial_y$ ) o anche  $\frac{\partial}{\partial x}$  ( $\frac{\partial}{\partial y}$ ).

Sia  $z_0$  un punto di accumulazione per  $S$ . Sarà

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad (1.11)$$

se  $\forall \epsilon > 0$  esiste un disco  $B(r, z_0)$  tale che per ogni  $z \in B_0(r, z_0)$   $|f(z) - A| < \epsilon$ .

Sarà

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A \quad (1.12)$$

se  $\forall \epsilon > 0$  esiste un  $k > 0$  tale che per ogni  $z$  con  $|z| > k$   $|f(z) - A| < \epsilon$ .

Nota Nel caso reale si possono considerare sia  $\lim_{x \rightarrow +\infty}$  che  $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ , nel caso complesso solo  $\lim_{z \rightarrow \infty}$ .

La funzione  $f(z)$  è *continua* in  $z_0$  se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (1.13)$$

**Esempio 1** Sia  $n$  intero positivo. Consideriamo  $f(z) = z^n$ . In coordinate polari  $z = \rho e^{i\varphi}$  e quindi

$$u = \rho^n \cos(n\varphi) \quad v = \rho^n \sin(n\varphi) \quad (1.14)$$

Sia  $\overline{B(1, 0)}$  il disco chiuso con centro nell'origine e raggio unitario:

$$\bar{B}(1, 0) = \{z \mid 0 \leq |z| \leq 1\} \quad (1.15)$$

Se  $z \in \overline{B(1, 0)}$ , allora  $z^n : \overline{B(1, 0)} \rightarrow \overline{B(1, 0)}$ .

**Esempio 2** Sia  $f(z) = \bar{z}$ . E' allora  $u = x$  e  $v = -y$ . Notare come  $f(z)$  non è necessariamente espressa analiticamente in termini di  $z$ .

## 1.2 Serie di potenze

Chiamasi *serie di potenze* una serie del tipo

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (1.16)$$

dove  $\{a_n\}$  è una successione di costanti reali o complesse.

In generale data una serie  $\sum_n b_n$  e definito  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{|b_{n-1}|}$  vale il seguente *criterio di convergenza*:

- i) se  $\lambda < 1$  la serie è assolutamente convergente e quindi convergente
- ii) se  $\lambda > 1$  la serie diverge
- iii) se  $\lambda = 1$  la serie può convergere o divergere.

Vale il seguente risultato.

**Teorema** Per ogni serie (1.16) esiste un numero  $R \geq 0$ , chiamato *raggio di convergenza* con le seguenti proprietà:

- i) la serie converge assolutamente per ogni  $z$  con  $|z| < R$
- ii) se  $|z| > R$  la serie diverge

Il cerchio  $|z| = R$  è detto *cerchio di convergenza*. Ricordiamo anche la formula di Hadamard:

$$1/R = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (1.17)$$

Ricordiamo che

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup[b_k, k \geq n] \quad (1.18)$$

Se inoltre esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$  si ha allora  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ .

Ricordiamo inoltre che se  $R$  è il raggio di convergenza la serie converge uniformemente per  $|z| < R$ .

**Esempio 1** La serie geometrica. Consideriamo la serie

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad (1.19)$$

Vale

$$1 + z + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z} \quad (1.20)$$

Ma  $|z|^n \rightarrow 0$  se  $|z| < 1$ , quindi la serie converge a  $1/(1 - z)$  per  $|z| < 1$ .

Se calcoliamo  $\frac{|b_n|}{|b_{n-1}|} = |z|$  e quindi ritroviamo, utilizzando il criterio di convergenza, che il raggio di convergenza è uno.

**Esempio 2** La serie esponenziale.

Consideriamo la serie

$$1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \dots + \frac{1}{n!}z^n + \dots \quad (1.21)$$

In questo caso

$$\frac{|b_n|}{|b_{n-1}|} = \frac{|z|}{n} \rightarrow 0 \quad \forall z \quad (1.22)$$

quindi il raggio di convergenza è infinito.

La funzione a cui converge questa serie definisce l'esponenziale  $e^z$  o  $\exp z$ .

### 1.3 Funzioni analitiche e olomorfe

**Definizione** Sia  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ ; sia  $z_0 \in \text{int}(S)$ . Diciamo che  $f$  è *olomorfa* in  $z_0$  se esiste un disco  $B(r, z_0)$  ed una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (1.23)$$

con raggio di convergenza maggiore o uguale ad  $r$  tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in B(r, z_0) \quad (1.24)$$

$f$  è olomorfa in un insieme  $S_1 \subset \text{int}(S)$  se è olomorfa in ogni punto di  $S_1$ .

**Definizione** Sia  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ ; sia  $z_0 \in \text{int}(S)$ . Diciamo che  $f$  è *analitica* in  $z_0$  se esiste (finito)

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (1.25)$$

$f'(z_0)$  è detta *derivata* di  $f$  in  $z_0$ . Analogamente la  $f$  è derivabile in un insieme  $S_1 \subset \text{int}(S)$  se è analitica in ogni punto di  $S_1$ . Per la differenziabilità valgono le consuete proprietà

$$(f + g)' = f' + g' \quad (fg)' = f'g + fg' \quad (f/g)' = \dots \quad (1.26)$$

Se  $f$  è analitica in  $z_0$  essa è anche continua in  $z_0$ .

**Definizione** Una funzione definita ed analitica in tutto  $\mathbb{C}$  si dice *intera*.

**Esempio** La funzione  $f(z) = z^n$  con  $n$  intero. E'  $f'(z) = nz^{n-1}$ .

**Teorema** Sia  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ;

i) se  $f$  è analitica in  $z_0 = x_0 + iy_0$  allora valgono le equazioni di Cauchy-Riemann (CR):

$$\partial_x u(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0) \quad \partial_y u(x_0, y_0) = -\partial_x v(x_0, y_0) \quad (1.27)$$

ii) Viceversa se  $u$  e  $v$  soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann in  $(x_0, y_0)$  e sono  $C^1$  in un intorno di  $x_0, y_0$ , allora  $f$  è analitica e vale

$$f'(z_0) = \partial_x f(z_0) = -i\partial_y f(z_0) \quad (1.28)$$

Dimostrazione.

i) Se  $f$  è analitica, allora calcolando il rapporto incrementale con  $\Delta z = h$  e con  $\Delta z = ik$  con  $h, k$  reali si ha:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \partial_x u(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0) \\ f'(z_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + ik) - f(z_0)}{ik} = \frac{1}{i} [\partial_y u(x_0, y_0) + i\partial_y v(x_0, y_0)] \end{aligned}$$

e quindi uguagliando si ottengono le condizioni (1.27).

ii) Sotto le ipotesi fatte è

$$u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) = h\partial_x u(x_0, y_0) + k\partial_y u(x_0, y_0) + \epsilon_1 \quad (1.29)$$

e

$$v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) = h\partial_x v(x_0, y_0) + k\partial_y v(x_0, y_0) + \epsilon_2 \quad (1.30)$$

con  $\epsilon_1/(h + ik) \rightarrow 0$  e  $\epsilon_2/(h + ik) \rightarrow 0$  quando  $h + ik \rightarrow 0$ .

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h + ik) - f(z_0)}{h + ik} &= \frac{u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0)]}{h + ik} \\ &= \frac{h\partial_x u + k\partial_y u + ih\partial_x v + ik\partial_y v}{h + ik} + \frac{\epsilon_1 + i\epsilon_2}{h + ik} \end{aligned}$$

Pertanto, utilizzando le (1.27)

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{(h + ik)\partial_x u + i(h + ik)\partial_x v}{h + ik} = \partial_x f(z_0) \\ &= \lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{-i[(h + ik)\partial_y u + i(h + ik)\partial_y v]}{h + ik} = -i\partial_y f(z_0) \end{aligned}$$

■

Nota Se  $f$  è analitica, dimostreremo che  $u, v \in C^\infty$ . Quindi derivando  $\partial u / \partial x$  una seconda volta ed utilizzando le (1.27), si ottiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.31)$$

e pertanto

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.32)$$

ed analogamente

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (1.33)$$

ovvero  $u$  e  $v$  sono funzioni che soddisfano l'equazione di Laplace e sono dette *armoniche*.

Se due funzioni  $u$  e  $v$  soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann,  $v$  è detta funzione *armonica coniugata* di  $u$ .

Consideriamo una funzione complessa  $g(x, y)$ . Possiamo pensare  $g$  funzione delle variabili  $z$  e  $\bar{z} = x - iy$

$$g(x, y) = f(z, \bar{z}) \quad (1.34)$$

In realtà queste due variabili non sono variabili indipendenti. Possiamo scrivere anche

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (1.35)$$

e quindi, trattando le variabili  $z$  e  $\bar{z}$  come indipendenti ed utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.36)$$

Quindi la condizione di analiticità si può anche riscrivere come

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (1.37)$$

**Esempio**  $f(z) = z^2$ . E'  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$  e quindi  $\partial_x u = 2x = \partial_y v$  e  $\partial_y u = -2y = -\partial_x v$ .

**Teorema** Se  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ha raggio di convergenza  $R$ :

- i) la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  ha raggio di convergenza  $R$
- ii)  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

Dimostrazione. (vedi [2])

## 1.4 Le funzioni esponenziale, logaritmo, potenza

Abbiamo già visto la definizione di  $\exp(z)$ .

La funzione  $\exp(z)$  è derivabile ed è  $f'(z) = \exp(z)$ . Questo può esser visto derivando la serie di potenze termine a termine:

$$(\exp(z))' = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots \quad (1.38)$$

La funzione esponenziale soddisfa il teorema di addizione:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad (1.39)$$

Infatti  $(e^z e^{c-z})' = e^z e^{c-z} - e^z e^{c-z} = 0$ . Quindi la funzione  $e^z e^{c-z} = \text{costante}$ . Il valore della costante è trovato per  $z = 0$ . Quindi  $e^z e^{c-z} = e^c$ , da cui segue la proprietà per  $z = z_1$  e  $c = z_1 + z_2$ .

Segue anche  $e^z e^{-z} = 1$  e quindi  $e^z$  non è mai zero. Inoltre se  $z = x + iy$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (1.40)$$

Da  $e^z = e^{z_1}$  segue

$$z = z_1 + 2k\pi i \quad \text{con } k \in \mathbf{Z} \quad (1.41)$$

Infatti da  $e^z = e^{z_1}$  segue, prendendo il modulo  $x_1 = x$  e  $e^{iy} = e^{iy_1}$  da cui

$$y = y_1 + 2k\pi \quad (1.42)$$

Utilizzando la funzione  $e^z$  è possibile definire le funzioni seno e coseno

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (1.43)$$

e le funzioni seno e coseno iperbolicici

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad (1.44)$$

Dalla (1.43) segue la formula di Eulero

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (1.45)$$

Le funzioni (1.43-1.44) sono funzioni intere e soddisfano le consuete proprietà di derivazione:

$$(\sin z)' = \cos z \quad (\cos z)' = -\sin z \quad (1.46)$$

etc.

Insieme con la funzione esponenziale possiamo studiare la sua funzione inversa, il logaritmo. Dato che la funzione esponenziale non è iniettiva ( $z_1 \neq z_2$  non implica  $f(z_1) \neq f(z_2)$ )

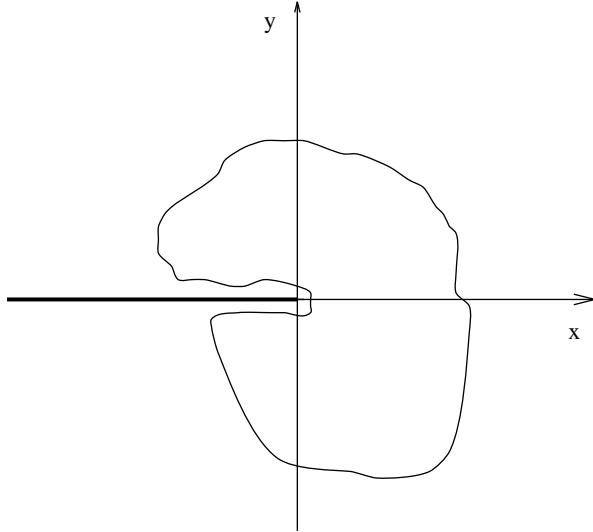


Figura 2: Il piano complesso con un taglio lungo l'asse reale negativo

$f(z_2)$ ) la funzione logaritmo non è una funzione monodroma. Definiamo il logaritmo  $\log z$  come

$$e^{\log z} = z \quad \forall z \neq 0 \quad (1.47)$$

Essendo

$$e^{\log z} = |z|e^{i\arg z} = e^{\log|z|+i\arg z} \quad (1.48)$$

segue

$$\log z = \log|z| + i\arg z + 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.49)$$

Il logaritmo è quindi una funzione polidroma.

Ogni  $k$  individua un *ramo* della funzione. Fissato un punto  $z_0$  su un ramo  $k$ , facendo un giro intorno all'origine in senso positivo (antiorario) e tornando nel punto  $z_0$  si passa al ramo  $k+1$  e così via.

Se limitiamo  $|\arg z| < \pi$  otteniamo il *valore principale* del logaritmo. In modo analogo possiamo pensare di tagliare il piano complesso lungo l'asse negativo delle  $x$  e considerare il taglio come avente due bordi distinti (Fig. 2). Allora fissato il valore di  $\log z$  in un punto, in tutti gli altri punti  $\log z$  è determinato con continuità. Sui bordi del taglio si hanno per  $\log z$  due valori che differiscono di  $2\pi i$ . Il punto  $z = 0$  è detto *punto di diramazione*.

Con questa convenzione all'interno del piano tagliato  $\log z$  è funzione analitica e vale il solito risultato

$$(\log z)' = \frac{1}{z} \quad (1.50)$$

Possiamo poi definire la potenza ad esponente complesso:

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\log|z|+i\arg z)} e^{2k\alpha\pi i} \quad \forall z \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (1.51)$$

Pertanto in generale anche la potenza è una funzione polidroma. Il punto  $z = 0$  è un punto di diramazione salvo nel caso in cui  $\alpha$  sia un intero. Se  $\alpha$  è razionale  $\alpha = m/n$  (con  $m$  e  $n$  primi) allora la potenza ha  $n$  valori distinti, se  $\alpha$  è irrazionale o complesso i valori distinti sono infiniti. Nel piano tagliato la funzione  $z^\alpha$  è analitica ed è

$$(z^\alpha)' = (e^{\alpha \log z})' = \frac{\alpha}{z} e^{\alpha \log z} = \alpha z^{\alpha-1} \quad (1.52)$$

**Esempio** La radice  $n$ -esima di 1.  $1^{1/n} = \exp(2\pi ik/n)$  con  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

## 2 Integrazione nel piano complesso

### 2.1 Curve e cammini

Cominciamo col definire una *curva* in  $\mathbb{C}$  come una applicazione  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , che ad ogni numero reale  $t \in [a, b]$  associa il numero complesso  $\gamma(t)$ , e tale che  $\operatorname{Re} \gamma(t)$  e  $\operatorname{Im} \gamma(t)$  siano funzioni di classe  $C^1$ . I punti  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  sono detti *estremi* della curva (o *punto iniziale* e *punto finale*). Il numero

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\operatorname{Re} \gamma'(t)^2 + \operatorname{Im} \gamma'(t)^2} dt \quad (2.53)$$

è detto *lunghezza* della curva. Una curva è *chiusa* se il punto iniziale e il punto finale coincidono.

E' conveniente introdurre anche una generalizzazione delle curve.

Definiamo *cammino* un insieme ordinato di curve  $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ , in modo che per ciascuna curva il punto finale della  $\gamma_j$  coincide col punto iniziale della  $\gamma_{j+1}$ .

Il numero  $L_\gamma = \sum_{i=1}^n L_{\gamma_i}$  è detto *lunghezza* del cammino  $\gamma$ .

Analogamente il cammino sarà *chiuso* se il suo punto iniziale coincide col punto finale.

### 2.2 Integrali su cammini

Sia  $f$  una funzione continua su un aperto  $U$  e  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva in  $U$  (in realtà basta che la funzione sia continua su  $R(\gamma)$ , l'immagine di  $\gamma$ ). Possiamo definire l'integrale di  $f$  lungo  $\gamma$  come

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad (2.54)$$

E' anche scritto frequentemente come  $\int_\gamma f(z) dz$ .

Si può verificare che l'integrale definito dalla (2.54) è invariante per riparametrizzazione. Sia  $g : [a, b] \mapsto [c, d]$  una funzione  $C^1$  tale che  $g(a) = c$ ,  $g(b) = d$  e sia  $\psi : [c, d] \mapsto \mathbb{C}$  una curva. Supponiamo inoltre

$$\gamma(t) = \psi(g(t)) \quad (2.55)$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b f(\psi(g(t)))\psi'(g(t))g'(t)dt \\ &= \int_c^d f(\psi(g))\psi'(g)dg \\ &= \int_{\psi} f \end{aligned}$$

Quindi l'integrale è invariante per riparametrizzazione.

Se  $\gamma$  è un cammino allora  $\int_{\gamma} f = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f$ .

### Esempi

Arco di circonferenza con centro in  $z_0$  e raggio  $r$  da  $z_1$  a  $z_2$ :

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it} \quad t \in [t_1, t_2] \quad (2.56)$$

con  $t_{1(2)} = \arg(z_{1(2)} - z_0)$

Segmento da  $z_1$  a  $z_2$

$$\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad t \in [0, 1] \quad (2.57)$$

### Esempi

Sia  $f(z) = z^n$ . Calcoliamo  $\int_{\gamma} z^n$ , nel caso in cui  $n$  sia intero positivo o negativo ma diverso da -1, lungo una circonferenza di raggio unitario intorno all'origine:

$$\int_{\gamma} z^n dz = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = 0 \quad (2.58)$$

Sia  $f(z) = \frac{1}{z-a}$ . Sia  $\gamma$  una circonferenza di raggio unitario intorno al punto  $a$ . Questa circonferenza corrisponde a  $\gamma(t) = a + e^{it}$   $0 \leq t \leq 2\pi$ . Quindi  $\gamma'(t) = ie^{it}$ . Vogliamo calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} e^{it} idt = 2\pi i \quad (2.59)$$

**Esempio** Sia  $\phi$  il segmento da  $z_0$  a  $z_0 + h$  ( $h$  è qui un numero complesso). L'equazione del segmento è  $\phi(t) = z_0 + th$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Pertanto

$$\int_{\phi} dz = h \int_0^1 dt = h \quad (2.60)$$

Data una curva  $\gamma: [a, b] \mapsto \mathbb{C}$  definiamo la *curva opposta*

$$\gamma^-: [-b, -a] \mapsto \mathbb{C} \quad (2.61)$$

che a  $t$  associa  $\gamma(-t)$ . Quindi abbiamo

$$\int_{\gamma^-} f = \int_{-b}^{-a} f(\gamma(-t)) \frac{d\gamma(-t)}{dt} dt = - \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds \quad (2.62)$$

dove abbiamo fatto il cambiamento di variabile  $s = -t$ . Pertanto

$$\int_{\gamma^-} f = - \int_{\gamma} f \quad (2.63)$$

Vale il seguente teorema.

**Teorema di Darboux** Sia  $\gamma$  un cammino e  $f$  continua su  $R(\gamma)$ . Allora vale la diseguaglianza (di Darboux):

$$| \int_{\gamma} f | \leq L_{\gamma} \sup_{z \in R(\gamma)} |f(z)| \quad (2.64)$$

Dimostrazione. Infatti è, nel caso in cui  $\gamma$  sia una curva,

$$| \int_{\gamma} f | \leq \int_a^b |f(z)\gamma'(t)| dt \leq L_{\gamma} \sup_{z \in R(\gamma)} |f(z)| \quad (2.65)$$

■

La dimostrazione si generalizza facilmente al caso di un cammino.

Valgono anche i teoremi seguenti:

**Teorema** Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni continue su  $R(\gamma)$ , convergenti uniformemente a una funzione  $f$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f \quad (2.66)$$

ed  $f$  è continua. Se  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  è una serie uniformemente convergente ad una funzione  $f$ , vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \quad (2.67)$$

ed  $f$  è continua.

Dimostrazione. La prima asserzione segue da

$$| \int_{\gamma} f_n - \int_{\gamma} f | \leq \int_{\gamma} |f_n - f| \leq L_{\gamma} \epsilon \quad (2.68)$$

dove abbiamo sfruttato l'uniforme convergenza delle  $f_n$  ovvero l'esistenza di un  $n_0$  tale che per  $n > n_0$   $|f(z) - f_n(z)| < \epsilon$  per ogni  $z$  in  $R(\gamma)$ . La continuità di  $f$  segue da

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \quad (2.69)$$

■

Sia  $f: U \mapsto \mathbb{C}$  e  $g$  una funzione analitica tale che

$$g' = f \quad \text{in } U \quad (2.70)$$

Allora  $g$  è detta *primitiva* di  $f$  in  $U$ .

Data una regione  $\Omega$  indichiamo con  $\Gamma_0(\Omega)$  l'insieme dei cammini chiusi  $\gamma$  tali che  $R(\gamma) \subset \Omega$  e con  $\Gamma(z_1, z_2, \Omega)$  l'insieme dei cammini  $\gamma$  tali che  $R(\gamma) \subset \Omega$  e che vanno da  $z_1$  a  $z_2$ .

Vale il seguente:

**Teorema della primitiva** Data una  $f: \Omega \mapsto \mathbb{C}$  continua, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

i)  $\int_{\gamma} f = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma_0(\Omega)$

ii)  $\forall z_1, z_2 \in \Omega$

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(z_1, z_2, \Omega) \quad (2.71)$$

iii)  $f$  ammette primitiva in  $\Omega$

Dimostrazione.

i)  $\rightarrow$  ii) Se consideriamo il cammino  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2^-)$   $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(z_1, z_2, \Omega)$ , questo è un cammino chiuso e quindi

$$\int_{\gamma} f = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2^-} f = 0 \quad (2.72)$$

da cui segue ii).

ii)  $\rightarrow$  iii) Fissato  $z_0$  in  $\Omega$  consideriamo

$$g(z) = \int_{\gamma} f \quad (2.73)$$

in cui  $\gamma$  è un cammino in  $\Gamma(z_0, z, \Omega)$ . Abbiamo allora

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{1}{h} \left[ \int_{\gamma+\phi} f - \int_{\gamma} f \right] = \frac{1}{h} \int_{\phi} f(z') dz' \quad (2.74)$$

dove  $\phi$  è il segmento da  $z$  a  $z+h$ . Per la continuità di  $f$  in  $z$  possiamo scrivere

$$f(z') = f(z) + \psi(z') \quad (2.75)$$

con  $\lim_{z' \rightarrow z} \psi(z') = 0$ . Quindi

$$\frac{1}{h} \int_{\phi} f(z') dz' = \frac{1}{h} \int_{\phi} f(z) dz' + \frac{1}{h} \int_{\phi} \psi(z') dz' = f(z) + \frac{1}{h} \int_{\phi} \psi(z') dz' \quad (2.76)$$

dove abbiamo utilizzato  $\int_{\phi} dz' = h$  (ovvero la (2.60)). Dalla (2.74) e dalla (2.76), segue

$$|\frac{g(z+h) - g(z)}{h} - f(z)| \leq \frac{1}{|h|} |h| \sup_{\phi} |\psi(z')| \quad (2.77)$$

Ma  $\sup_{\phi} |\psi(z')|$  tende a zero come  $h \rightarrow 0$  e quindi la proposizione è dimostrata. ■

iii) → i) Se  $g$  è primitiva allora

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b g' \gamma' dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = 0 \quad (2.78)$$

dato che il cammino è chiuso. ■

**Esempio** Sia  $f(z) = z^n$  con  $n$  intero diverso da -1.  $z^n$  ammette primitiva  $(z^{n+1}/(n+1))$ , quindi per ogni cammino  $\gamma$  chiuso (non passante per l'origine nel caso in cui  $n$  sia negativo)

$$\int_{\gamma} z^n = 0 \quad (2.79)$$

## 2.3 Teorema di Goursat

$R$  denoterà il rettangolo e  $\partial R$  la frontiera del rettangolo.

**Teorema (di Goursat)** Sia  $R$  un rettangolo e sia  $f$  una funzione analitica su  $R$ . Allora

$$\int_{\partial R} f = 0 \quad (2.80)$$

Dimostrazione. Decomponiamo il rettangolo in quattro rettangoli bisecando i lati di  $R$ . Quindi è

$$\int_{\partial R} f = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial R_i} f \quad (2.81)$$

dato che gli integrali sui lati coincidenti dei quattro rettangoli si cancellano. Pertanto

$$|\int_{\partial R} f| \leq \sum_{i=1}^4 |\int_{\partial R_i} f| \quad (2.82)$$

Quindi esisterà un rettangolo, diciamo  $R_k$ , tra gli  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$ , per cui

$$|\int_{\partial R_k} f| \geq \frac{1}{4} |\int_{\partial R} f| \quad (2.83)$$

Altrimenti sarebbe  $\forall k$

$$|\int_{\partial R_k} f| < \frac{1}{4} |\int_{\partial R} f| \quad (2.84)$$

e sommando su  $k = 1, \dots, 4$

$$|\int_{\partial R} f| \leq \sum_{k=1}^4 |\int_{\partial R_k} f| < |\int_{\partial R} f| \quad (2.85)$$

Indichiamo  $R_k$  con  $R^{(1)}$ . Decomponiamo ora  $R^{(1)}$  ancora in quattro rettangoli uguali bisecando i lati. Tra questi ne troveremo un altro, denotiamolo con  $R^{(2)}$ , tale che

$$|\int_{\partial R^{(2)}} f| \geq \frac{1}{4} |\int_{\partial R^{(1)}} f| \quad (2.86)$$

Procedendo in questo modo troviamo una successione di rettangoli

$$R^{(1)} \supset R^{(2)} \supset R^{(3)} \supset \dots \quad (2.87)$$

tali che

$$|\int_{\partial R^{(n+1)}} f| \geq \frac{1}{4} |\int_{\partial R^{(n)}} f| \quad (2.88)$$

Pertanto

$$|\int_{\partial R^{(n)}} f| \geq \frac{1}{4^n} |\int_{\partial R} f| \quad (2.89)$$

Sarà inoltre  $L_{n+1} = \frac{1}{2} L_n$ , se  $L_n$  denota il perimetro di  $R^{(n)}$ , e quindi  $L_n = \frac{1}{2^n} L$  se  $L$  è il perimetro di  $R$ .

Sia  $\alpha_n$  la successione dei centri dei rettangoli. E' facile dimostrare che questa successione è una successione di Cauchy, e quindi converge ad un punto  $z_0 \in R$ . Infatti fissato  $\epsilon > 0$  possiamo trovare un  $N$  tale che la diagonale di  $R^{(N)}$  sia minore di  $\epsilon$ . Allora se  $n, m > N$   $\alpha_n$  ed  $\alpha_m$  stanno in  $R^{(N)}$  ed inoltre

$$|\alpha_n - \alpha_m| < \text{diag}R^{(N)} < \epsilon \quad (2.90)$$

Sia  $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ .  $z_0$  sta in ciascun rettangolo, perché ciascun rettangolo è chiuso, e quindi sta nell'intersezione dei rettangoli  $R^{(n)}$ .

Poichè  $f$  è differenziabile in  $R$ ,  $\forall \epsilon > 0$  esiste un  $B(r, z_0)$  tale che

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + h(z)(z - z_0) \quad (2.91)$$

con  $|h(z)| < \epsilon$  per ogni  $z \in B(r, z_0)$ . Per  $n$  sufficientemente grande  $R^{(n)} \subset B(r, z_0)$  e quindi

$$\int_{\partial R^{(n)}} f(z) dz = \int_{\partial R^{(n)}} f(z_0) dz + f'(z_0) \int_{\partial R^{(n)}} (z - z_0) dz + \int_{\partial R^{(n)}} (z - z_0) h(z) dz \quad (2.92)$$

Ma i primi due integrali per la (2.79) sono nulli, quindi

$$\int_{\partial R^{(n)}} f(z) dz = \int_{\partial R^{(n)}} (z - z_0) h(z) dz \quad (2.93)$$

Otteniamo allora (utilizzando il teorema di Darboux)

$$\frac{1}{4^n} \left| \int_{\partial R} f \right| \leq \left| \int_{\partial R^{(n)}} (z - z_0) h(z) dz \right| \leq \sup |(z - z_0) h(z)| L_n \leq d_n L_n \sup |h(z)| \leq \frac{1}{4^n} L d \epsilon \quad (2.94)$$

dove  $d_n$  ( $d$ ) denota la lunghezza della diagonale del rettangolo  $R^{(n)}$  ( $R$ ) e quindi

$$\left| \int_{\partial R} f \right| \leq L d \epsilon \quad (2.95)$$

da cui segue, essendo  $\epsilon$  arbitrario,

$$\int_{\partial R} f = 0 \quad (2.96)$$

■

**Definizione** Data  $f : S \mapsto \mathbb{C}$  un punto  $z_0$  (non necessariamente appartenente ad  $S$ ) si dice *singolarità isolata* se esiste un intorno  $B(r, z_0)$  tale che  $f$  è definita ed analitica nell'intorno di  $z_0$ , ma non in  $z_0$ .

Una singolarità isolata si dice

i) una *singolarità eliminabile* se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0 \quad (2.97)$$

ii) un *polo* se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \quad (2.98)$$

iii) una *singolarità essenziale* se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  non esiste né finito né infinito.

**Esempio** La funzione  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ . Questa funzione ha una singolarità eliminabile in  $z = 0$ . In  $z = 0$  la funzione non è definita pero' vale  $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 0$ . Inoltre  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$  e quindi possiamo estendere la  $f(z)$  in zero in modo che assuma il valore 1.

Il teorema di Goursat rimane valido anche in presenza di un numero finito di singolarità eliminabili all'interno del rettangolo.

**Teorema di Cauchy per il disco** Data  $f : S \mapsto \mathbb{C}$ , analitica su  $D$ , disco contenuto all'interno di  $S$ . Allora  $\forall \gamma \in \Gamma_0(D)$  è

$$\int_{\gamma} f = 0 \quad (2.99)$$

Dimostrazione. Sia  $z_0$  il centro del disco. Definiamo

$$F_1(z) = \int_{\gamma_1} f \quad F_2(z) = \int_{\gamma_2} f \quad (2.100)$$

dove  $\gamma_1 = (\gamma_{1v}, \gamma_{1o})$  è un cammino da  $z_0$  a  $z$  composto da un cammino parallelo all'asse immaginario  $\gamma_{1v}$  seguito da uno parallelo all'asse reale  $\gamma_{1o}$  e  $\gamma_2 = (\gamma_{2o}, \gamma_{2v})$  un cammino

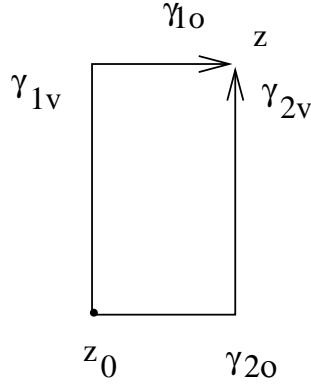


Figura 3: I cammini per la dimostrazione del Teorema di Cauchy per il disco

da  $z_0$  a  $z$  composto da un cammino parallelo all'asse reale  $\gamma_{2o}$  seguito da uno parallelo all'asse immaginario  $\gamma_{2v}$  come in Fig. 3.

Il cammino  $\gamma = (\gamma_{1v}, \gamma_{1o}, \gamma_{2v}, \gamma_{2o})$  è quindi un cammino chiuso rettangolare e il teorema di Goursat applicato a  $\gamma$  da

$$F_1(z) = F_2(z) \quad \forall z \in D \quad (2.101)$$

Poniamo  $F = F_1 = F_2$ . Se consideriamo poi un incremento reale  $h$  è

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th) h dt = f(z+t_0 h) \quad (2.102)$$

utilizzando il teorema della media. Quindi passando a limite troviamo

$$\partial_x F(z) = f(z) \quad (2.103)$$

Analogamente considerando un incremento  $ik$  con  $k$  reale troviamo

$$\partial_y F(z) = if(z) \quad (2.104)$$

Quindi le condizioni di Cauchy Riemann sono soddisfatte,  $F$  è analitica ed è primitiva di  $f$  in  $D$ . Pertanto, per il teorema della primitiva,

$$\int_{\gamma} f = 0 \quad (2.105)$$

per ogni cammino chiuso  $\gamma \in D$ .

Il teorema di Cauchy rimane valido in presenza di singolarità eliminabili per cammini chiusi non passanti per tali singolarità.

## 2.4 Indice

Vogliamo generalizzare il teorema di Cauchy. Per prima cosa definiamo l'indice ovvero quante volte una curva (cammino) gira intorno ad un punto.

Abbiamo visto in un esempio che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} = 1 \quad (2.106)$$

se  $\gamma$  è una circonferenza intorno all'origine in senso antiorario.

E' naturale quindi definire l'*indice* di un cammino chiuso  $\gamma$  rispetto ad un punto  $z_0 \notin R(\gamma)$

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} \quad (2.107)$$

**Teorema** Se  $\gamma$  è un cammino che non passa per  $z_0$ ,  $n(\gamma, z_0)$  è un intero.

Dimostrazione Sia  $\gamma$  un cammino  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ . Sia  $\gamma(t)$  con  $t \in [a, b]$  la parametrizzazione del cammino. Consideriamo

$$F(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt \quad (2.108)$$

$F$  è continua e differenziabile in tutti i punti, salvo al più nei punti di raccordo tra le curve che costituiscono il cammino.

$$F'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \quad (2.109)$$

Se calcoliamo

$$\frac{d}{dt} [e^{-F(t)} (\gamma(t) - z_0)] = e^{-F(t)} \gamma'(t) - F'(t) e^{-F(t)} (\gamma(t) - z_0) = 0 \quad (2.110)$$

Pertanto la funzione  $e^{-F(t)} (\gamma(t) - z_0)$  essendo continua e costante a tratti è costante. Valutandola, in  $b$  ed  $a$ , otteniamo

$$e^{-F(b)} (\gamma(b) - z_0) = 1(\gamma(a) - z_0) \quad (2.111)$$

Ma  $\gamma(a) = \gamma(b)$  (il cammino è chiuso) e quindi  $e^{-F(b)} = 1$  da cui

$$F(b) = 2\pi ik \quad (2.112)$$

e

$$n(\gamma, z_0) = k \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.113)$$

■

L'insieme dei punti  $R(\gamma)$  è chiuso e limitato. Il suo complemento in  $\mathbb{C}$  è aperto e può esser rappresentato come unione di regioni disgiunte (le *componenti*). Una sola contiene il punto all'infinito (*componente illimitata*).

Si dimostra anche che  $n(\gamma, z_0)$  è una funzione continua di  $z_0$ . Poiché  $n$  può assumere solo valori interi, sarà costante in ciascuna delle componenti connesse di  $\mathbb{C} \setminus R(\gamma)$ . Inoltre se  $z_0 \in S$  ed  $S$  è la componente illimitata  $n(\gamma, z_0) = 0$ . In questo caso basta prendere  $z - z_0$  arbitrariamente grande per dimostrarlo.

## 2.5 Formula Integrale di Cauchy

**Teorema** Sia  $f$  definita ed analitica su un disco  $D$ . Per ogni  $z \in D$  e che non sta sul cammino  $\gamma \in \Gamma_0(D)$  vale

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (2.114)$$

Dimostrazione. Basta applicare il teorema di Cauchy alla funzione  $\frac{f(w) - f(z)}{w - z}$ . Questa funzione è definita ed analitica per  $w \neq z$  e vale  $\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}(w - z) = 0$ , ovvero ha una singolarità eliminabile in  $w = z$ . Pertanto

$$\int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma_0(D) \quad (2.115)$$

da cui segue la formula integrale. ■

L'applicazione più comune è quella al caso  $n(\gamma, z) = 1$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (2.116)$$

Se fosse possibile derivare la (2.116) sotto il segno di integrale troveremmo:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw \quad (2.117)$$

Il seguente teorema lo permette:

**Teorema** Supponiamo che  $g(w)$  sia una funzione continua su un cammino (non necessariamente chiuso)  $\gamma \in U$ . Allora la funzione

$$F(z) = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{(w - z)} dw \quad (2.118)$$

è analitica nel complemento di  $\gamma$  in  $U$  e vale

$$F^{(n)}(z) = n! \int_{\gamma} \frac{g(w)}{(w - z)^{n+1}} dw \quad (2.119)$$

Dimostrazione. [1] [2]

Derivando  $n$  volte la (2.116), si ottiene la *formula integrale per la derivata n-esima*

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} n! \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw \quad (2.120)$$

Segue il

**Teorema di Liouville** Una funzione analitica e limitata in tutto  $\mathbb{C}$  è costante.

Dimostrazione. Infatti se  $|f(z)| \leq M \forall z$ , considerando per  $\gamma$  una circonferenza di raggio  $r$  e centro in  $z$ , abbiamo

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^2} 2\pi r = \frac{M}{r} \quad (2.121)$$

e poichè possiamo scegliere  $r$  arbitrariamente grande segue il teorema. ■

Abbiamo quindi visto che una funzione analitica ha derivate di tutti gli ordini che sono analitiche. Possiamo ora mostrare il

**Teorema di Morera** Se  $f(z)$  è definita e continua su una regione  $\Omega$  e se  $\int_{\gamma} f = 0$  per tutti i cammini chiusi in  $\Omega$ , allora  $f(z)$  è analitica in  $\Omega$ .

Dimostrazione. Avevamo già visto che sotto queste ipotesi  $f$  ammette una primitiva analitica  $g$ . Abbiamo visto che la derivata di una funzione analitica è analitica, quindi  $f$  è analitica.

Il teorema di Liouville porta anche ad una semplice dimostrazione del *Teorema fondamentale dell'algebra*.

Supponiamo che  $P(z)$  sia un polinomio di grado  $n$ . Se  $P(z)$  non fosse mai zero, la funzione  $1/P(z)$  sarebbe una funzione analitica in tutto il piano complesso. Sappiamo poi che  $\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty$ , quindi  $1/P(z)$  tende a zero. Pertanto  $1/P(z)$  è piccolo al di fuori di un disco di raggio  $R$  e assumerà un massimo all'interno del disco. Ma questo implica limitatezza e per il teorema di Liouville  $1/P(z)$  sarebbe una costante. Pertanto  $P(z) = 0$  deve avere una radice, che supponiamo di ordine  $m$ . E' quindi  $P(z) = (z-a)^m P_1(z)$ , con  $P_1(z)$  polinomio di grado  $n-m$ . Riapplicando il ragionamento, si ottiene il teorema.

## 2.6 Sviluppo di Taylor

**Teorema** Sia  $f$  definita ed analitica in un intorno  $B(r, a)$  di  $a$ . Allora  $\forall z \in B(r, a)$  è

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad (2.122)$$

con

$$f^{(n)}(a) = n! \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad (2.123)$$

e  $\gamma$  è una circonferenza con centro in  $a$ .

Questa espressione è detta *sviluppo di Taylor* nell'intorno di  $a$ .

Dimostrazione.  $\forall z \in B(r, a)$  sia  $\gamma$  una circonferenza con centro in  $a$  e raggio  $\rho$  tale che  $|z-a| < \rho < r$ . Evidentemente

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (2.124)$$

Ma  $1/(w - z)$  può esser espresso come la serie geometrica (uniformemente convergente per  $w \in R(\gamma)$ )

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - a) - (z - a)} = \frac{1}{w - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - a}{w - a} \right)^n \quad (2.125)$$

Sosituendo nella (2.124) e integrando termine a termine si ottiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw \right] (z - a)^n \quad (2.126)$$

e quindi la (2.122).

## 2.7 Sviluppo di Laurent

Si chiama *serie di Laurent* di potenze di  $z$  una serie del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad (2.127)$$

dove gli  $a_n \in \mathbb{C}$ . La serie convergerà in una regione  $R_1 \leq |z| \leq R_2$ . Nell'intorno di una singolarità isolata  $a$  una funzione può essere espressa come serie di Laurent di  $z - a$ .

**Teorema** Sia  $f$  definita ed analitica in un intorno  $B_0(r, a)$  di  $a$ , dove  $f$  ha una singolarità isolata. Allora  $\forall z \in B_0(r, a)$  vale

$$f(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p (z - a)^p \quad (2.128)$$

con

$$c_p = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) (w - a)^{-p-1} dw \quad (2.129)$$

essendo  $\gamma$  una qualunque circonferenza con centro in  $a$  e raggio minore di  $r$ .

Dimostrazione. Sia  $z \in B_0(r, a)$ . Fissiamo  $\epsilon > 0$ , in modo che presi i cerchi  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  con centro in  $a$  e di raggio rispettivamente  $|z| - \epsilon$  e  $|z| + \epsilon$ , si possa trovare una circonferenza  $\varphi \subset B_0(r, a)$  con centro in  $z$  tale che il cammino  $\gamma_1$  di Fig. 4 sia contenuto nella circonferenza  $\varphi$  e così via. Possiamo trovare in questo modo un numero finito di cammini  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  in modo che per qualunque funzione  $g$  continua su  $\cup_{j=1}^n R(\gamma_j)$ , è

$$\int_{\varphi_2} g - \int_{\varphi_1} g = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} g \quad (2.130)$$

Sia adesso  $g(w) = f(w)/(w - z)$ . Per il teorema di Cauchy

$$\int_{\varphi_2} g - \int_{\varphi_1} g = \int_{\gamma_1} g \quad (2.131)$$

Figura 4: Cammini per la dimostrazione dello sviluppo di Laurent

dato che la funzione  $f(w)/(w - z)$  è analitica all'interno di  $\gamma_2, \dots, \gamma_m$ . Pertanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_1} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw = f(z) \quad (2.132)$$

Ma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_2} \frac{f(w)}{w - z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_2} \frac{f(w)}{(w - a) - (z - a)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_2} \frac{f(w)}{w - a} \frac{1}{1 - \frac{z - a}{w - a}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_2} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw (z - a)^n \end{aligned} \quad (2.133)$$

Analogamente per  $\int_{\varphi_1}$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_1} \frac{f(w)}{w - z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_1} \frac{f(w)}{(z - a) - (w - a)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=0}^{\infty} \int_{\varphi_1} f(w) \frac{(w - a)^p}{(z - a)^{p+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^{\infty} \int_{\varphi_1} f(w) \frac{(w - a)^{p-1}}{(z - a)^p} dw \end{aligned} \quad (2.134)$$

Dalle (2.132), (2.133) e (2.134) segue il teorema. Infatti

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_1} f(w)(w - a)^{-p-1} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_2} f(w)(w - a)^{-p-1} dw - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(w)(w - a)^{-p-1} dw \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(w)(w-a)^{-p-1} dw$$

dove abbiamo fatto uso del teorema di Cauchy per il disco per calcolare ciascuno degli  $\int_{\gamma_j}$ . Quindi la circonferenza intorno a cui calcolare  $c_n$  può essere una qualsiasi con raggio minore di  $r$ .

La parte  $\sum_{p=1}^{\infty} c_{-p}(z-a)^{-p}$  è detta *parte caratteristica di Laurent in un intorno di a* (p.c.L. in a).

**Esempio** La serie di Laurent nell'intorno di  $z = 0$  di  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ .

E'

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} \quad (2.135)$$

e pertanto

$$f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots \quad (2.136)$$

## 2.8 Singolarità

**Teorema** Data una funzione  $f$  con una singolarità isolata in  $a$  le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- i)  $f$  ha in  $z = a$  una singolarità eliminabile
- ii) la p.c.L. in  $a$  è zero
- iii) esiste finito  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$
- iv) esiste un  $r > 0$  tale che  $f$  è limitata su  $B_0(r, a)$ .

Dimostrazione. i)  $\rightarrow$  ii). La funzione  $f(w)(w-a)^{n-1}$   $n \geq 1$  è definita ed analitica tranne in  $a$  dove ha una singolarità eliminabile, quindi

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)(w-a)^{n-1} dw = 0 \quad (2.137)$$

ii)  $\rightarrow$  iii). Dallo sviluppo di Laurent con  $c_{-n} = 0$   $n \geq 1$ , segue  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$ .

iii)  $\rightarrow$  iv). Ovvio.

iv)  $\rightarrow$  i). Se  $f$  è limitata in  $B_0(r, a)$ , segue

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a) = 0 \quad (2.138)$$

**Teorema** Data una funzione  $f$  con una singolarità isolata in  $a$  le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- i)  $f$  ha in  $z = a$  un polo

ii) la funzione  $1/f(z)$  ha in  $z = a$  una singolarità eliminabile e una volta eliminata tale singolarità, esiste un intero  $m \geq 1$  tale che  $1/f(z)$  ha in  $z = a$  uno zero di un certo ordine  $m$ .

iii)  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^m$  esiste finito e diverso da zero.

iv) la p.c.L. in  $a$  di  $f$  è un polinomio di grado  $m$  in  $(z - a)^{-1}$ .

Dimostrazione. i)  $\rightarrow$  ii). In un conveniente  $B_0(r, a)$   $f$  è analitica e diversa da zero. Quindi sullo stesso insieme  $1/f$  è analitica e  $1/f(z) \rightarrow 0$  per  $z \rightarrow a$ . Una volta eliminata tale singolarità eliminabile, ridefinendo  $1/f(a) = 0$ ,  $1/f(z)$  ha in  $z = a$  uno zero di ordine  $m \geq 1$ .

ii)  $\rightarrow$  iii) Se  $1/f(z)$  ha in  $z = a$  uno zero di ordine  $m$ ,

$$\frac{1}{f(z)} = (z - a)^m g(z) \quad (2.139)$$

con  $g$  analitica in un intorno di  $a$  e tale che  $g(a) \neq 0$ . Quindi

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^m = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(a)} \neq 0 \quad (2.140)$$

iii)  $\rightarrow$  iv).  $f(z)(z - a)^m$  ha in  $a$  una singolarità eliminabile, quindi

$$f(z)(z - a)^m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (2.141)$$

da cui segue iv).

iv)  $\rightarrow$  i). E'

$$f(z) = \frac{1}{(z - a)^m} [c_{-m} + c_{-m+1}(z - a) + \dots] \quad (2.142)$$

da cui segue  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ . ■

$m$  è l'ordine del polo.

**Teorema di Casorati Weierstrass** Sia  $z_0$  una singolarità essenziale per la funzione  $f$  e sia  $B_0(r, z_0)$  un disco centrato in  $z_0$ . Allora  $f(B_0(r, z_0))$  è denso in  $\mathbb{C} \forall r$ .

Dimostrazione. Supponiamo il teorema falso. Allora esiste un numero complesso  $w$  e un numero positivo  $\epsilon$  tali che

$$|f(z) - w| > \epsilon \quad \forall z \in B_0(r, z_0) \quad (2.143)$$

Ma allora

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - w}{z - z_0} = \infty \quad (2.144)$$

e quindi la funzione  $\frac{f(z) - w}{z - z_0}$  ha un polo e pertanto anche la  $f(z)$  avrebbe un polo o una singolarità eliminabile contrariamente all'ipotesi.

E' facile dimostrare inoltre che se  $z_0$  è una singolarità essenziale per la funzione  $f$  la p.c.L. ha infiniti termini. Infatti se la p.c.L. si riducesse ad un polinomio esisterebbe finito o infinito il  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , contrariamente all'ipotesi.

E' stato inoltre mostrato da Picard che  $f(z)$  in ogni intorno della singolarità essenziale assume ogni valore di  $\mathbf{C}$  eccetto al più uno. Per esempio la funzione  $\exp(1/z)$  in  $B_0(r, 0)$  prende ogni valore eccetto il valore 0.

**Esempio** La funzione  $\exp \frac{1}{z}$  ha in  $z = 0$  una singolarità essenziale. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \frac{1}{x} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \exp \frac{1}{x} = 0 \quad (2.145)$$

Lo sviluppo di Laurent è dato da

$$\exp \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots \quad (2.146)$$

**Esempio** La funzione  $\sin \frac{1}{z}$  ha in  $z = 0$  una singolarità essenziale. Infatti se consideriamo le due successioni

$$\{x_n\} = \frac{1}{n\pi} \quad \{x_n\} = \frac{2}{(4n+1)\pi} \quad (2.147)$$

tendenti a zero per  $n \rightarrow \infty$  abbiamo nel primo caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = 0 \quad (2.148)$$

e nel secondo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = 1 \quad (2.149)$$

Data una funzione definita ed analitica nell'intorno di  $\infty$ , cioè per  $|z| > k > 0$ , trattiamo l'infinito come una singolarità isolata. Il tipo di singolarità è quello di  $f \circ i$  dove  $i: \mathbf{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{C}$  associando a  $z \mapsto f(z) = 1/z$ .

Quindi per esempio  $z = \infty$  è una singolarità essenziale per le funzioni  $\exp(z)$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ , è un polo di ordine  $m$  per un polinomio di grado  $m$ .

## 2.9 Zeri di una funzione analitica

Sia  $f: \Omega \mapsto \mathbf{C}$  una funzione analitica in  $\Omega$ . Sia  $a$  uno zero per  $f(z)$ . Espandiamo  $f$  in serie di Taylor nell'intorno dello zero

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (2.150)$$

Se  $a$  è uno zero due casi possono presentarsi. Tutti i  $c_n$  sono zero, nel qual caso  $f(z) = 0$  identicamente su  $\Omega$ , oppure esiste un  $m$  tale che

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0 \quad (2.151)$$

e quindi vale

$$f(z) = (z - a)^m g(z) \quad (2.152)$$

con  $g(z)$  analitica e  $g(a) \neq 0$ . Vale allora il seguente

**Teorema** Uno zero di ordine finito è isolato.

Dimostrazione. Dall'ipotesi segue che possiamo scrivere  $f(z) = (z - a)^m g(z)$  con  $g(a) \neq 0$ .  $g(z)$  è analitica e quindi continua, quindi posto  $\epsilon = \frac{1}{2}|g(a)|$ , esiste un  $\delta$  tale che

$$|z - a| < \delta \Rightarrow |g(z) - g(a)| < \epsilon \quad (2.153)$$

Pertanto

$$|g(z)| \geq ||g(a)| - |g(a) - g(z)|| > 2\epsilon - \epsilon = \epsilon \quad (2.154)$$

ovvero  $g(z) \neq 0$ .

Quindi se  $|z - a| < \delta$   $f(z) = g(z)(z - a)^m \neq 0$ . ■

Vale il teorema seguente:

**Teorema** Sia  $S$  un insieme di zeri per una funzione analitica  $f: \Omega \mapsto \mathbb{C}$ , aventi punto di accumulazione  $a \in \Omega$ . Allora in ogni intorno  $B(r, a)$ ,  $f$  è identicamente zero.

Dimostrazione. Poichè  $a$  è punto di accumulazione possiamo scegliere una successione di zeri  $\{z_n\} \rightarrow a$ . Per la continuità di  $f$  si ha

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0 \quad (2.155)$$

Ma  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$ , quindi  $f(a) = 0$  implica  $c_0 = 0$ . Supponiamo che il primo coefficiente non nullo sia  $c_m$ . E' quindi

$$f(z) = (z - a)^m [c_m + c_{m+1}(z - a) + \dots] \quad (2.156)$$

Ma se fosse vero questo esisterebbe un intorno  $B(r, a)$  in cui  $f(z)$  è non nullo, contrariamente all'ipotesi che  $a$  sia un punto di accumulazione. Pertanto  $f(z) = 0$  identicamente in  $B(r, a)$ . ■

La dimostrazione si può estendere a tutto  $\Omega$ .

Segue allora il

**Teorema di identità.** Se  $f$  e  $g$  sono analitiche su  $\Omega$  e uguali su un insieme di punti aventi punto di accumulazione in  $\Omega$ , allora  $f = g$  su  $\Omega$ .

Questo teorema è alla base della teoria del prolungamento analitico. Se  $f$  e  $g$  sono analitiche in  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  (che hanno una parte comune in  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ ) e se  $f(z) = g(z) \forall z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ , allora la funzione  $F(z) = f(z)$  se  $z \in \Omega_1$  e  $F(z) = g(z)$  se  $z \in \Omega_2$  è analitica in  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  e costituisce il *prolungamento analitico* della funzione  $f$  ( $g$ ) dalla regione  $\Omega_1$  ( $\Omega_2$ ) a  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ .

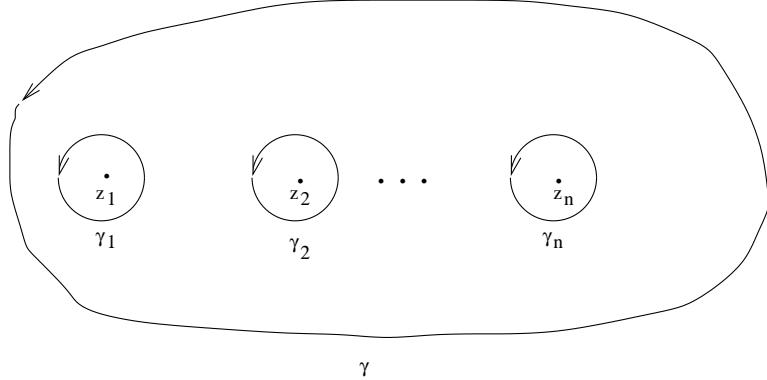


Figura 5:

### 3 Formulazione generale del teorema di Cauchy

Abbiamo visto finora il teorema di Cauchy per un disco, ovvero se  $f$  è analitica su un disco  $D$

$$\int_{\gamma} f = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma_0(D) \quad (3.1)$$

Sia  $\Omega$  un insieme su cui  $f$  è analitica. Vogliamo generalizzare tale teorema in due direzioni. Da una parte per cammini più complicati, anche sconnessi, come in Fig. 5 i cammini  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  intorno ai punti  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \Omega$ . Se  $\gamma$  è un cammino che gira intorno a  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , ci aspettiamo che

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \dots + \int_{\gamma_n} f \quad (3.2)$$

sia se la  $f$  è analitica ma anche nel caso in cui  $f$  non sia analitica in  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Dall'altra parte vogliamo generalizzare il teorema a regioni semplicemente connesse.

E' conveniente introdurre il concetto di *catena*.

Siano in generale  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  dei cammini e  $m_1, m_2, \dots, m_n$  degli interi (non necessariamente positivi) corrispondenti alla molteplicità del cammino. Una catena sarà scritta nella forma

$$\gamma = m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 + \dots + m_n \gamma_n \quad (3.3)$$

Diciamo che la catena è chiusa se ogni cammino in essa è chiuso.

Definiamo l'integrale lungo la catena  $\gamma$

$$\int_{\gamma} f = \sum_i m_i \int_{\gamma_i} f \quad (3.4)$$

Definiamo l'indice del punto  $a$  rispetto ad una catena chiusa  $\gamma$ ,

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz \quad (3.5)$$

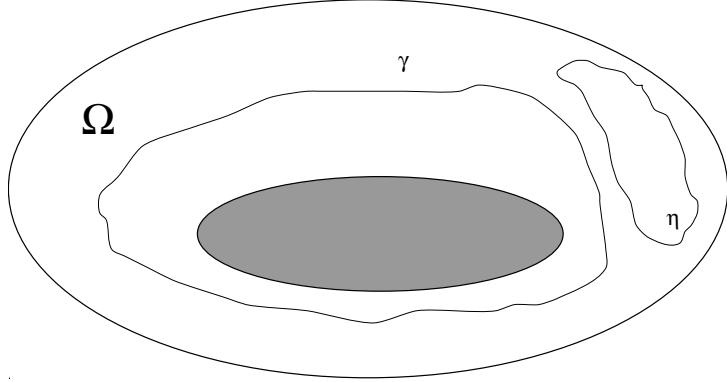


Figura 6: La curva  $\eta$  è omologa a zero, mentre la curva  $\gamma$  non lo è

Se  $\gamma, \eta$  sono catene chiuse in  $\Omega$ , diciamo che  $\gamma$  è *omologa* a zero ( $\gamma \approx 0$ ) in  $\Omega$ , se

$$n(\gamma, a) = 0 \quad \forall a \notin \Omega \quad (3.6)$$

Diciamo che  $\gamma$  è *omologa* a  $\eta$  ( $\gamma \approx \eta$ ) in  $\Omega$ , se

$$n(\gamma, a) = n(\eta, a) \quad \forall a \notin \Omega \quad (3.7)$$

Riportiamo due esempi in Fig. 6.

Una regione  $\Omega$  è *semplicemente connessa* se e solo se  $n(\gamma, a) = 0$  per tutte le catene chiuse  $\gamma \in \Omega$  e per tutti i punti  $a \notin \Omega$  (ovvero tutte le catene chiuse sono omologhe a zero).

**Teorema di Cauchy per regioni semplicemente connesse** Se  $f: \Omega \mapsto \mathbf{C}$  è analitica su una regione semplicemente connessa  $\Omega$

$$\int_{\gamma} f = 0 \quad (3.8)$$

per ogni catena chiusa  $\gamma \in \Omega$ .

Ecco infine la forma più generale.

**Teorema di Cauchy** Sia  $f: \Omega \mapsto \mathbf{C}$  analitica in  $\Omega$ . Allora

$$\int_{\gamma} f = 0 \quad (3.9)$$

per tutte le catene chiuse omologhe a zero in  $\Omega$ .

Dimostrazione. [1].

**Teorema** Sia  $f: \Omega \mapsto \mathbf{C}$  analitica in  $\Omega$ . Se  $\gamma$  e  $\eta$  sono catene chiuse omologhe in  $\Omega$  è

$$\int_{\gamma} f = \int_{\eta} f \quad (3.10)$$

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente alla catena  $\gamma, \eta^-$  che è omologa a zero.

Il teorema di Cauchy continua a valere in presenza di un numero finito di singolarità eliminabili. Tutti i risultati dimostrati come conseguenza del teorema di Cauchy per il disco si possono generalizzare alle catene chiuse omologhe a zero.

**Teorema** Sia  $f: \Omega \mapsto \mathbb{C}$  analitica in  $\Omega$  salvo un numero finito di punti  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Sia  $\gamma$  una catena chiusa omologa a zero in  $\Omega$  e siano  $\gamma_i \in \Omega$  delle circonferenze intorno a  $z_i$  orientate in senso antiorario e tali che  $\gamma_i$  contiene  $z_i$  ma non  $z_j$  per  $j \neq i$ . Sia  $m_i = n(\gamma, z_i)$ . Sia  $\Omega^*$  l'insieme  $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ . Allora  $\gamma$  è omologa a  $\sum m_i \gamma_i$  in  $\Omega^*$  e

$$\int_{\gamma} f = \sum_{i=1}^n m_i \int_{\gamma_i} f \quad (3.11)$$

Dimostrazione. Consideriamo la catena  $\Gamma = \gamma - \sum m_i \gamma_i$ . Se  $a \notin \Omega$  è

$$n(\Gamma, a) = n(\gamma, a) - \sum m_i n(\gamma_i, a) = 0 \quad (3.12)$$

Se  $a = z_k$

$$n(\Gamma, a) = n(\gamma, z_k) - m_k = 0 \quad (3.13)$$

Applicando il teorema di Cauchy alla catena  $\Gamma$  si ottiene il risultato.

In particolare, utilizzando questo risultato nello sviluppo di Taylor e di Laurent (2.128), possiamo sostituire alla circonferenza  $\gamma$  una qualsiasi curva omologa a  $\gamma$ .

### 3.1 Residuo

Diamo la definizione di residuo. Data una funzione  $f$  analitica in  $\Omega$ , sia  $z_0$  una singolarità isolata. Definiamo *residuo*

$$Res_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f \quad (3.14)$$

dove  $\gamma$  è un cammino chiuso con  $R(\gamma) \subset \Omega$  tale che  $n(\gamma, z_0) = 1$  e  $n(\gamma, w) = 0$  se  $w \notin \Omega \cup \{z_0\}$ .

Ricordando la definizione di  $c_{-n}$ ,

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)(w - z_0)^{n-1} dw \quad (3.15)$$

segue che

$$Res_{z_0} f = c_{-1} \quad (3.16)$$

Utilizzando il teorema precedente è possibile allora, utilizzando la definizione di residuo, enunciare il seguente

**Teorema del residuo** Sia  $f: \Omega \mapsto \mathbb{C}$  analitica in  $\Omega$  salvo un numero finito di punti  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , in cui ha singolarità isolate. Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f = \sum_i n(\gamma, z_i) Res_{z_i} f \quad (3.17)$$

per ogni catena  $\gamma$  omologa a zero in  $\Omega$ .

**Teorema** Sia  $a$  un polo di  $f$ ; allora

i) Se  $a$  è di ordine  $m$

$$Res_a f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-a)^m] \quad (3.18)$$

ii) Se  $a$  è di ordine 1 è dalla i)

$$Res_a f = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a) \quad (3.19)$$

o anche

$$Res_a f = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)'(z)} \quad (3.20)$$

Dimostrazione. Dallo sviluppo di Laurent segue

$$f(z)(z-a)^m = c_{-m} + \dots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^{k+m} = g(z) \quad (3.21)$$

e quindi

$$c_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} \quad (3.22)$$

Per  $z \in B_0(r, a)$  è  $g^{(k)}(z) = [f(z)(z-a)^m]^{(k)}(z)$  e pertanto

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-a)^m] \quad (3.23)$$

ii) Per  $z \in B_0(r, a)$  è

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-a} \quad (3.24)$$

con  $g(z) = c_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^{k+1}$ . Quindi

$$g(a) = c_{-1} = Res_a f = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a) \quad (3.25)$$

D'altra parte

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z) = \frac{d}{dz} \frac{z-a}{g(z)} = \frac{g(z) - (z-a)g'(z)}{g^2(z)} \quad (3.26)$$

e passando a limite si ottiene la (3.20).

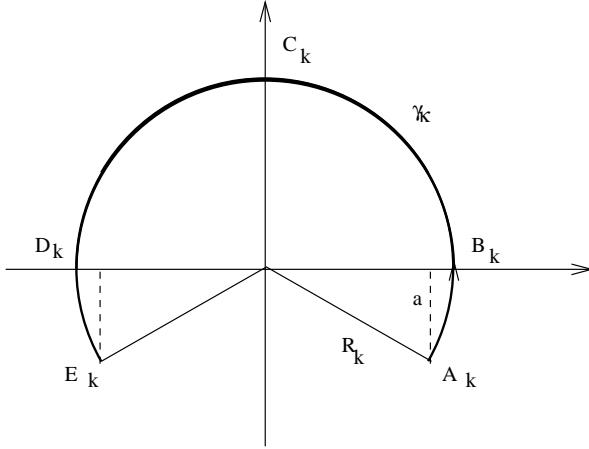


Figura 7: Archi  $\gamma_k$  per la dimostrazione del Lemma di Jordan

### 3.2 Lemma di Jordan

**Lemma** Sia  $a$  un polo di ordine uno per  $f$  e sia  $\gamma_r: [c, d] \mapsto \mathbb{C}$  un arco di circonferenza con centro in  $a$  e raggio  $r$ , con  $\arg \gamma_r(c) = \theta$  e  $\arg \gamma_r(d) = \theta + \alpha$ . Allora

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f = i\alpha \text{Res}_a f \quad (3.27)$$

Dimostrazione. Posto  $g(z) = f(z)(z - a)$  per  $z \neq a$  e  $g(a) = \text{Res}_a f$ ,  $g$  è olomorfa in  $a$ . Usando il teorema della media

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{g(z)}{z - a} dz \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\theta}^{\theta + \alpha} g(a + re^{it}) idt \\ &= i \lim_{r \rightarrow 0} g(a + re^{it_0}) \alpha = i\alpha g(a) \end{aligned}$$

da cui segue il lemma.

**Lemma di Jordan** Sia  $\gamma_k$  una successione di archi di circonferenza di raggio  $R_k$  come in Fig. 7. Posto  $\theta_k = \arcsin \frac{a}{R_k}$  ( $a > 0$ ) è

$$\gamma_k: [-\theta_k, \pi + \theta_k] \mapsto \mathbb{C} \quad (3.28)$$

Sia  $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \infty$ . Sia  $f$  continua su  $R(\gamma_k) \forall k$  e posto  $M_k = \sup_{z \in R(\gamma_k)} |f(z)|$  sia  $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = 0$ . Allora  $\forall \lambda > 0$  è

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma_k} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0 \quad (3.29)$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che sono zero i contributi degli archi  $A_k B_k$  e  $B_k C_k$ .

Su  $A_k B_k$  vale

$$|f(z)e^{i\lambda z}| \leq M_k e^{-\lambda \sin t R_k} \leq M_k e^{\lambda a} \quad (3.30)$$

e perciò

$$\left| \int_{A_k B_k} f(z)e^{i\lambda z} dz \right| \leq M_k R_k \theta_k e^{\lambda a} \quad (3.31)$$

Per  $k \rightarrow \infty$   $R_k \theta_k \rightarrow a$  quindi il limite del secondo membro della (3.31) è zero.

Su  $B_k C_k$ , utilizzando la diseguaglianza,

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1 \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.32)$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_k C_k} f(z)e^{i\lambda z} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi/2} f(R_k e^{it}) \exp[i\lambda R_k(\cos t + i \sin t)] i R_k e^{it} dt \right| \\ &\leq M_k R_k \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2}{\pi} R_k \lambda t\right) dt \\ &= \frac{\pi}{2} M_k \frac{1 - \exp(-\lambda R_k)}{\lambda} \end{aligned}$$

Ma il risultato va a zero per  $k \rightarrow \infty$  e quindi è nullo il contributo dell'arco  $B_k C_k$ .

Per simmetria sono zero anche i contributi di  $C_k D_k$  e  $D_k E_k$ .

**Lemma** Se sulla successione di archi  $\gamma_k$  è  $|zf(z)| \leq M_k$  ed è  $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = 0$ , allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma_k} f = 0 \quad (3.33)$$

Dimostrazione. Infatti  $|f(z)z| \leq M_k$  implica  $|f(z)| \leq M_k/R_k$  e pertanto

$$\left| \int_{\gamma_k} f \right| \leq \frac{M_k}{R_k} R_k (\pi + 2\theta_k) \quad (3.34)$$

Il secondo membro va a zero per  $k \rightarrow \infty$ .

### 3.3 Teorema dell'indicatore logaritmico

Una funzione  $f$  in  $\Omega$  è detta *meromorfa* in  $\Omega$  se è analitica in  $\Omega$  eccetto che per la presenza di poli. Una funzione meromorfa ha in ogni regione limitata un numero finito di poli. Se ve ne fossero infiniti essi ammetterebbero (per il teorema di Bolzano-Weierstrass) un punto di accumulazione  $z_0 \in \Omega$  e questo non sarebbe una singolarità isolata. I poli possono invece aver punto di accumulazione all'infinito (Esempio  $1/\sin z$ . Questa funzione ha poli in  $z = n\pi$ , e in  $z = \infty$  una singolarità essenziale ma non isolata).

**Teorema** Sia  $f$  una funzione meromorfa in  $\Omega$ . Allora se  $z_0$  è uno zero

$$Res_{z_0} \frac{f'}{f} = ord_{z_0} f \quad (3.35)$$

Se  $z_0$  è un polo

$$Res_{z_0} \frac{f'}{f} = -ord_{z_0} f \quad (3.36)$$

Dimostrazione. Se  $z_0$  è uno zero (polo) di ordine  $m$ ,

$$f(z) = (z - z_0)^{m(-m)} g(z) \quad (3.37)$$

con  $g(z)$  analitica nell'intorno di  $z_0$  e  $g(z_0) \neq 0$ . Quindi

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(-m)}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (3.38)$$

da cui, ricordando la definizione di residuo, segue il teorema.

Vale quindi il

**Teorema** Sia  $\gamma$  una catena omologa a 0 in  $\Omega$  e  $f$  una funzione meromorfa in  $\Omega$ , con zeri in  $a_j$  e poli in  $b_k$  allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} = \sum_j n(\gamma, a_j) ord_{a_j} f - \sum_k n(\gamma, b_k) ord_{b_k} f \quad (3.39)$$

Nelle applicazioni spesso gli indici saranno uguali a uno, la catena sarà semplicemente una curva e quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'}{f} = (\text{numero di zeri} - \text{numero di poli}) \quad (3.40)$$

dove poli e zeri sono all'interno della curva  $C$  e contati col loro ordine.

### 3.4 Problema di Dirichlet

Come applicazione della formula integrale di Cauchy, studiamo il problema di Dirichlet.

Sia  $\Omega$  una regione con frontiera  $\partial\Omega = \gamma$  e  $g(x, y)$  sia una funzione continua reale definita su  $\gamma$ . Consideriamo il problema di trovare una funzione  $u(x, y)$  tale che

- i)  $u(x, y)$  è armonica su  $\Omega$  e continua su  $\bar{\Omega}$
- ii)  $u(x, y)$  coincide con  $g(x, y)$  su  $\gamma$ .

Un problema fisico che corrisponde al problema di Dirichlet è quello che corrisponde alle configurazioni di equilibrio di una membrana elastica in assenza di forze esterne e

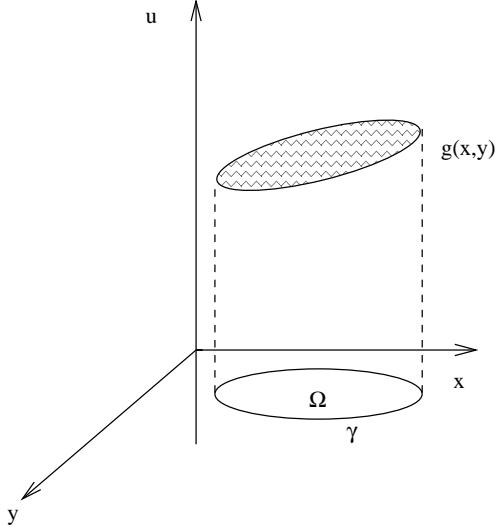


Figura 8: La membrana con una cornice rigida

trascurandone il peso. Supponiamo di considerare una membrana, con una cornice rigida  $g(x, y)$ , come in Fig. 8. La membrana, pensata come superficie, avrà una equazione

$$u = u(x, y) \quad (3.41)$$

dove  $u(x, y)$  è continua su  $\bar{\Omega}$ . Riferendo lo spazio ad un sistema cartesiano avente sull'asse  $z$   $u$ , sia  $\gamma$  la proiezione di  $g(x, y)$  sul piano  $(x, y)$ .

Si dimostra nella teoria dell'elasticità che la posizione di equilibrio della membrana in assenza di forze esterne e trascurandone il peso, è soluzione dell'equazione di Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.42)$$

con la condizione al contorno

$$u(x, y) = g(x, y) \quad su \quad \gamma \quad (3.43)$$

Il seguente teorema assicura l'unicità della soluzione:

**Teorema del massimo modulo** Se  $f$  è una funzione analitica su una regione  $\Omega$  limitato) e continua su  $\bar{\Omega}$  e non è costante,  $|f|$  assume il massimo in un punto della frontiera  $\partial M$ .

Dimostrazione. Infatti essendo  $|f(z)|$  una funzione reale e continua su  $\bar{\Omega}$  ammetterà un massimo in un punto  $z_0$ . Supponiamo  $z_0 \in \Omega$ . Allora esiste un disco  $B(z_0, r_0)$  tale che  $\forall z \in B(z_0, r_0)$

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 \dots \quad (3.44)$$

Allora  $\forall r < r_0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \quad (3.45)$$

D'altra parte essendo  $z_0$  massimo

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq |f(z_0)| = |c_0| \quad (3.46)$$

pertanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta \leq |c_0|^2 \quad (3.47)$$

che implica  $c_1 = c_2 = \dots = 0$  e quindi  $f(z) = c_0$  ovvero costante. Quindi se  $f$  non è costante  $z_0 \in \partial M$ .

**Esempio**  $f(z) = z^2$  definita sul disco di raggio 1  $\overline{B(1, 0)}$ . Il modulo è  $|f(z)| = x^2 + y^2$  che assume il massimo valore sull'cerchio.

C'è un teorema analogo per funzioni armoniche.

**Teorema** Se  $u(x, y)$  è una funzione reale armonica su una regione limitata  $\Omega$  e continua sulla regione chiusa  $\bar{\Omega}$ , essa assume massimo sulla frontiera.

Dimostrazione. (Data la  $u$  si può costruire una funzione armonica  $v$  coniugata, tale che la  $\phi = u + iv$  sia analitica). se poniamo  $f = \exp \phi$  sappiamo che  $|f| = \exp u$  è massimo sulla frontiera, pertanto anche il massimo di  $u$  sarà assunto sulla frontiera.)

Si vede quindi che il problema di Dirichlet ha una unica soluzione. Infatti se  $u_1$  e  $u_2$  fossero due soluzioni, anche la differenza  $u_1 - u_2$  è armonica ed assume il massimo su  $\gamma$ . Pertanto

$$0 \leq |u_1(x, y) - u_2(x, y)| \leq 0 \quad (3.48)$$

dato che sulla frontiera le due funzioni coincidono. Pertanto  $u_1 = u_2$ .

**Teorema** Una funzione armonica su una regione semplicemente connessa  $\Omega$  può esser considerata la parte reale o la parte immaginaria di una funzione analitica in  $\Omega$ .

Per ricavare la funzione analitica basta integrare le equazioni di CR

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.49)$$

In altre parole assegnata la  $u$ , è possibile ricavare la  $v$  come soluzione data dall'integrale

$$\int_{z_0}^z \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \quad (3.50)$$

dove  $z_0$  è un punto in  $\Omega$ . e quindi

$$v(x, y) = \int_{z_0}^z \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + cost \quad (3.51)$$

### 3.5 Problema di Dirichlet per il disco e per il semipiano

Dimostriamo prima il seguente

**Teorema** Sia  $f$  analitica sul disco  $\overline{B(R, 0)}$  con centro nell'origine e raggio  $R$ . Allora  $\forall r < R, \forall \theta \in [0, 2\pi)$  vale

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} f(Re^{i\varphi}) d\varphi \quad (3.52)$$

Dimostrazione. Dalla formula integrale di Cauchy (2.116) scegliendo  $\gamma = \partial B(R, 0)$  e  $z = re^{i\theta}$  punto interno alla circonferenza  $\gamma$ , si ha

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} f(Re^{i\varphi}) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\theta-\varphi)}} f(Re^{i\varphi}) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - rRe^{-i(\theta-\varphi)}}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} f(Re^{i\varphi}) d\varphi \end{aligned} \quad (3.53)$$

D'altra parte ancora per il teorema di Cauchy prendendo un punto  $z = \frac{R^2}{r}e^{i\theta}$  all'esterno del disco è

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} \frac{1}{w - \frac{R^2}{r}e^{i\theta}} f(w) dw \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - \frac{R^2}{r}e^{i\theta}} f(Re^{i\varphi}) d\varphi \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - rRe^{-i(\theta-\varphi)}}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} f(Re^{i\varphi}) d\varphi \end{aligned} \quad (3.54)$$

Quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{rRe^{-i(\theta-\varphi)}}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} f(Re^{i\varphi}) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} f(Re^{i\varphi}) d\varphi \quad (3.55)$$

Utilizzando la (3.55) nella (3.53) si ottiene il teorema.

Data una funzione armonica  $u$  su un dominio semplicemente connesso essa può esser pensata come la parte reale di una funzione analitica, quindi se  $u$  è armonica sul disco vale la *formula di Poisson*

$$u(re^{i\theta}) \equiv u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} u(Re^{i\varphi}) d\varphi \quad (3.56)$$

La (3.56) suggerisce come scrivere la soluzione per il problema di Dirichlet per il disco, ovvero la funzione  $u$  armonica in  $B(r, 0)$  e tale che  $u(Re^{i\theta}) = g(\theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  con  $g$  funzione assegnata (non necessariamente armonica),

$$u(re^{i\theta}) \equiv u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} g(\varphi) d\varphi \quad (3.57)$$

La (3.57) si può riscrivere introducendo il *nucleo di Poisson*  $K$  (per semplicità poniamo  $R = 1$ ):

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \int_0^{2\pi} K(r, \theta - \varphi) g(\varphi) d\varphi \quad (3.58)$$

con

$$K(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \quad (3.59)$$

**Nota** Si puo' dimostrare che

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + r^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n(\theta - \varphi) \quad (3.60)$$

Infatti e' (quando  $z = r \exp i\theta$ )

$$\Re \left( \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} \right) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + r^2} \quad (3.61)$$

Ma

$$\begin{aligned} \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} &= -1 + 2 \frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - z} = -1 + 2 \frac{1}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\theta-\varphi)}} \\ &= 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n e^{in(\theta-\varphi)} \end{aligned} \quad (3.62)$$

In modo analogo si dimostra che

$$\frac{2Rr \sin(\theta - \varphi)}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + r^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \sin n(\theta - \varphi) \quad (3.63)$$

**Nota.** Si può verificare che  $u$  è armonica passando a coordinate polari

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (3.64)$$

e dimostrando che il nucleo di Poisson soddisfa l'equazione

$$\Delta K(r, \theta) = 0 \quad (3.65)$$

La verifica che  $u(\theta)$  quando  $r \rightarrow 1$  tende a  $g(\varphi)$  richiede la seguente proprietà

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} K(r, \theta - \varphi) g(\varphi) d\varphi = g(\theta) \quad (3.66)$$

Quindi nel limite l'azione dell'integrale col nucleo di Poisson diventa equivalente all'azione della distribuzione delta di Dirac, che studieremo in seguito.

In modo analogo si dimostra il problema di Dirichlet per il semipiano. Vale infatti il

**Teorema** Sia  $f$  analitica e limitata nel semipiano  $\operatorname{Im} z \geq 0$ . Allora  $\forall z = x + iy$  con  $y > 0$  è

$$f(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t-x)^2 + y^2} f(t) dt \quad (3.67)$$

Dimostrazione. Basta applicare il teorema di Cauchy due volte. La prima volta scegliamo un cammino lungo l'asse reale e lo chiudiamo con un semicirconferenza nel semipiano superiore, con  $z$  all'interno della curva,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} f(w) dw \quad (3.68)$$

Nel secondo caso scegliamo al posto di  $z$   $\bar{z}$ , quindi

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w-\bar{z}} f(w) dw \quad (3.69)$$

dato che  $\bar{z}$  sta nel semipiano inferiore. Sottraendo le due equazioni si ottiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{y}{\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{(w-z)(w-\bar{z})} f(w) dw \\ &= \frac{y}{\pi} \int_{-R}^R \frac{1}{(t-x)^2 + y^2} f(t) dt \\ &\quad + \frac{iy}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{(Re^{i\theta} - z)(Re^{i\theta} - \bar{z})} f(Re^{i\theta}) Re^{i\theta} d\theta \end{aligned}$$

Nel limite  $R \rightarrow \infty$  si ottiene la (3.67), tenuto conto che il secondo termine va a zero.

Da questo segue la soluzione per il problema di Dirichlet per il semipiano, ovvero la funzione  $u$  armonica nel semipiano  $y > 0$ , e tale che  $u(x, 0) = g(x)$  con  $g(x)$  funzione continua assegnata:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t-x)^2 + y^2} g(t) dt \quad (3.70)$$

Data la funzione  $\frac{y}{(t-x)^2 + y^2}$  si verifica infatti che

$$\Delta \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} = 0 \quad (3.71)$$

## 4 Funzioni intere e meromorfe

### 4.1 Fattorizzazione

Abbiamo visto che una funzione intera è una funzione analitica in tutto  $\mathbf{C}$ , e una funzione meromorfa è analitica eccetto al più dei poli. Si puo' anche estendere la definizione di funzione meromorfa al piano complesso esteso. Una funzione è *meromorfa in  $\mathbf{C} \cup \infty$*  se è meromorfa in  $\mathbf{C}$  ed in  $z_0 = \infty$  è analitica o ha un polo.

Una caratterizzazione equivalente corrisponde a definire le funzioni meromorfe come quelle funzioni che sono esprimibili come

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad (4.1)$$

con  $g$  e  $h$  funzioni analitiche. In particolare se  $f$  è una funzione meromorfa in  $\mathbf{C}$  essa è il quoziente di due funzioni intere, se  $f$  è una funzione meromorfa in  $\mathbf{C} \cup \infty$  essa è il quoziente di due polinomi.

Alcuni teoremi sulle funzioni intere.

**Teorema** Sia  $f$  una funzione intera senza zeri. Allora esiste una funzione intera  $h$  tale che

$$f(z) = e^{h(z)} \quad (4.2)$$

Dimostrazione. [2] (Ne segue che  $f'/f$  è analitica, e la funzione  $h = \int_{z_0}^z f'/f dz + cost$ ).

Se  $f$  intera ha un numero finito di zeri  $z_i$  di molteplicità  $n_i$  la funzione

$$h(z) = \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^q (z - z_i)^{n_i}} \quad (4.3)$$

è intera e priva di zeri e quindi

$$f(z) = A e^{g(z)} \prod_{i=1}^q \left(1 - \frac{z}{z_i}\right)^{n_i} \quad (4.4)$$

Se abbiamo una funzione intera con un numero infinito di zeri possiamo pensare di costruire un prodotto infinito

$$\prod_{i=1}^{\infty} (z - z_i)^{n_i} \quad (4.5)$$

In generale questo prodotto infinito non convergerà e quindi dovremo aggiungere un fattore di convergenza.

Diamo l'enunciato del teorema di Weierstrass

**Teorema** Sia  $f$  una funzione intera tale che  $f(0) \neq 0$ ; se  $z_1, z_2, \dots$  sono gli zeri di  $f$  elencati con la loro molteplicità esiste una funzione intera  $g$  e una successione di interi non negativi  $\{p_i\}$  tali che

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{i=1}^{\infty} E_{p_i} \left( \frac{z}{z_i} \right) \quad (4.6)$$

Gli  $E_p$  sono i *fattori elementari*

$$E_p(z) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right) \quad p = 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

con  $E_0 = 1 - z$ .

Se  $f$  ha in  $z = 0$  uno zero di ordine  $k$  basta applicare il teorema a  $f(z)/z^k$ .

Questa fattorizzazione non è unica.

La convergenza del prodotto infinito è definita nel modo seguente.

Sia  $\{a_i\}$  una successione di numeri complessi ( $a_i \neq -1$ ). Il prodotto infinito converge se converge la successione dei prodotti parziali

$$\left\{ \prod_{i=1}^n (1 + a_i) \right\} \quad (4.8)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il prodotto infinito converga è che converga  $\sum_i |a_i|$ .

**Esempio**  $\sin \pi z$ . La funzione  $\sin \pi z$  ha zeri del primo ordine in tutti i punti di  $\mathbb{Z}$ . Vale il seguente sviluppo

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (4.9)$$

## 4.2 La funzione Gamma di Eulero

Definiamo una funzione intera che ha zeri negli interi negativi:

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \quad (4.10)$$

E' evidente che  $G(-z)$  ha zeri negli interi positivi e confrontando con la rappresentazione di  $\sin \pi z$

$$zG(z)G(-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \quad (4.11)$$

Per costruzione  $G(z-1)$  ha gli stessi zeri di  $G(z)$  più uno zero nell'origine.

Possiamo quindi scrivere

$$G(z-1) = ze^{\gamma(z)}G(z) \quad (4.12)$$

con  $\gamma(z)$  funzione intera.

Per determinare  $\gamma(z)$  deriviamo logaritmicamente la eq.(4.12), ottenendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) \quad (4.13)$$

dove abbiamo fatto uso di

$$G'(z)/G(z) = \frac{d}{dz} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \log(z+n) - \frac{z}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) \quad (4.14)$$

Sostituendo nella serie di sinistra della eq. (4.13)  $n \rightarrow n+1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) + 1 \end{aligned}$$

e quindi confrontando con la eq.(4.13), segue  $\gamma'(z) = 0$  ovvero  $\gamma(z) = \gamma$  costante. Definiamo ora

$$H(z) = G(z)e^{\gamma z} \quad (4.15)$$

che soddisfa

$$H(z-1) = G(z-1)e^{\gamma(z-1)} = ze^{\gamma}G(z)e^{\gamma(z-1)} = zH(z) \quad (4.16)$$

Il valore della costante  $\gamma$  (costante di Eulero) è facilmente determinato dalla (4.10) e dalla (4.12):

$$G(0) = 1 = e^{\gamma}G(1) \quad (4.17)$$

da cui

$$e^{-\gamma} = G(1) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \quad (4.18)$$

Prendendo l' $n$ -esimo prodotto parziale

$$(1+1)(1+\frac{1}{2}) \cdots (1+\frac{1}{n}) e^{-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})} = (n+1)e^{-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})} \quad (4.19)$$

e considerandone il logaritmo

$$-(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) + \log(n+1) \quad (4.20)$$

otteniamo

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right) \quad (4.21)$$

Questa successione è convergente, il valore approssimato di  $\gamma = 0.57722\dots$

Definiamo la funzione *Gamma di Eulero* con

$$\Gamma(z) = \frac{1}{zH(z)} \quad (4.22)$$

Dalla eq.(4.16) segue la proprietà

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (4.23)$$

Dalla definizione di  $H$  segue

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}} \quad (4.24)$$

e confrontando con la eq.(4.9)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(z)(-z)\Gamma(-z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{-1} \frac{-z}{-z} = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (4.25)$$

La funzione  $\Gamma(z)$  è meromorfa ed ha poli negli interi negativi e in zero.

Abbiamo  $\Gamma(1) = 1/H(1) = 1/[(\exp \gamma)G(1)] = 1$ ,  $\Gamma(2) = 1$ . In generale  $\Gamma(n+1) = n!$ . Dalla eq.(4.25)  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

Esiste una formula integrale per  $\Gamma$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (4.26)$$

La funzione è analitica per  $Re z > 0$ .

Diamo anche la formula di Stirling (che dimostreremo in seguito)

$$\Gamma(n+1) = n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad (4.27)$$

valida per  $n \rightarrow \infty$ . Questa è un caso speciale di

$$\Gamma(z) \sim z^{z-1/2} e^{-z} \sqrt{2\pi} \quad (4.28)$$

valida per  $|z| \rightarrow \infty$ .

Il residuo nei poli  $z = n$  vale

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\pi(z+n)}{\sin(\pi z)\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\cos(n\pi)} \frac{1}{\Gamma(1+n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (4.29)$$

## 5 Trasformazioni conformi

Sia  $\gamma: [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , una curva in una regione  $\Omega$  e sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definita e continua su  $R(\gamma)$ . L'equazione

$$w = \eta(t) = f(\gamma(t)) \quad (5.1)$$

definisce una curva  $\eta$  nel piano complesso  $w$ . Se  $f$  è analitica in  $z_0 = \gamma(t_0)$  allora

$$\eta'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0) \quad a \leq t_0 \leq b \quad (5.2)$$

Consideriamo un punto  $z_0$  tale che  $\gamma'(t_0) \neq 0$  e  $f'(z_0) \neq 0$ . E' chiaro che sarà  $\eta'(t_0) \neq 0$ . Quindi  $\eta$  ha tangente in  $w_0 = f(z_0)$  e l'angolo con l'asse orizzontale è dato da

$$\arg(\eta'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\gamma'(t_0)) \quad (5.3)$$

Quindi l'angolo tra la tangente a  $\eta$  in  $w_0$  e la tangente a  $\gamma$  in  $z_0$  è uguale all'  $\arg f'(z_0)$ , che è indipendente dalle curve. Per questa ragione curve che sono tangenti l'una all'altra nel piano complesso  $z$  in  $z_0$  sono trasformate in curve tangenti tra di loro nel piano complesso  $w$  in  $w_0$ . Inoltre curve che formano un certo angolo nel punto  $z_0$  sono trasformate in curve che formano lo stesso angolo in  $w_0$ . A causa di questa proprietà la trasformazione è detta *conforme* in  $z_0$ .

Se poi consideriamo il modulo

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \quad (5.4)$$

vediamo che un segmento infinitesimo nel piano  $z$  viene mandato in un segmento infinitesimo nel piano  $w$  ma moltiplicato per il fattore  $|f'(z_0)|$ . Possiamo interpretare  $|f'(z_0)|$  come un *coefficiente di contrazione o espansione*.

Quindi in tutti i punti di  $\Omega$  in cui  $f'(z) \neq 0$  la trasformazione è conforme.

Abbiamo visto quindi che una trasformazione analitica è equivalente ad una trasformazione conforme. Viceversa se  $f$  è conforme ne segue che è analitica.

Infatti, supponiamo che  $f$  sia conforme e inoltre che  $f \in C^1$  ( $u, v \in C^1$ ). Quindi

$$\begin{aligned} \eta'(t_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2}(\gamma'(t_0) + \overline{\gamma'(t_0)}) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{2i}(\gamma'(t_0) - \overline{\gamma'(t_0)}) \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \eta'(t_0) &= \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})\gamma'(t_0) + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})\overline{\gamma'(t_0)} \\ &= \gamma'(t_0)[\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})\frac{\overline{\gamma'(t_0)}}{\gamma'(t_0)}] \end{aligned}$$

Se la trasformazione è conforme in  $z_0$

$$\arg \eta' - \arg \gamma' \quad (5.5)$$

deve esser indipendente da  $\gamma$ . Ma

$$\arg \eta' - \arg \gamma' = \arg [\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})\frac{\overline{\gamma'(t_0)}}{\gamma'(t_0)}] \quad (5.6)$$

e quindi dovrà essere

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (5.7)$$

ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \quad (5.8)$$

che sono le condizioni di CR. Pertanto  $f$  è analitica in  $z_0$ .

**Mapping di Möebius** Per  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e soggetti alla condizione  $ad - bc \neq 0$  la funzione

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (5.9)$$

è nota come *trasformazione di Möebius*. Queste trasformazioni hanno una serie di proprietà.  $f(z)$  è analitica per  $z \neq -d/c$  e

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0 \quad (5.10)$$

Quindi  $f$  è conforme in  $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ .

Supponiamo di avere un secondo mapping

$$g(z) = \frac{Az + B}{Cz + D} \quad (5.11)$$

con  $AD - BC \neq 0$ . Si verifica che il prodotto

$$gf(z) = \frac{(Aa + Bc)z + (Ab + Bd)}{(Ca + Dc)z + (Cb + Dd)} \quad (5.12)$$

è ancora una trasformazione di Möebius. E' possibile trovare una trasformazione inversa ed esiste l'unità. In altre parole queste trasformazioni formano un gruppo.

**Teorema della rappresentazione di Riemann** Sia  $\Omega$  una regione semplicemente connessa che non sia l'intero piano complesso. Allora  $\Omega$  è analiticamente isomorfo al disco di raggio 1. Ovvero dato un punto  $z_0 \in \Omega$  esiste una funzione analitica e invertibile

$$f: \Omega \rightarrow B(1, 0) \quad (5.13)$$

tale che  $f(z_0) = 0$ . Tale isomorfismo è determinato a meno di una rotazione ed è univocamente determinato dalla condizione  $f'(z_0) > 0$ .

Dimostrazione. [2].

Ovviamente affinchè il mapping esista occorre che  $\Omega$  sia semplicemente connessa dato che il disco è semplicemente connesso. Inoltre  $\Omega$  non può esser tutto  $\mathbb{C}$ . Infatti dato che  $|f(z)| \leq 1$ , se  $f$  fosse definito su tutto  $\mathbb{C}$  per il teorema di Liouville sarebbe una costante.

**Esempio**  $f(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$  con  $|\alpha| < 1$ . La funzione è analitica sul disco  $|z| \leq 1$ . Inoltre se  $|z| = 1$   $z = e^{i\theta}$

$$g(z) = \frac{e^{i\theta} - \alpha}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - \bar{\alpha})} \quad (5.14)$$

Il denominatore (a parte la fase) è il complesso coniugato del numeratore e quindi se  $|z| = 1$ ,  $|f(z)| = 1$ . Quindi per il principio del massimo  $|f(z)| \leq 1$  si ha  $|z| \leq 1$ . Quindi la trasformazione mappa il disco unitario nel disco unitario, mandando il punto  $\alpha$  nell'origine.

**Esempio**  $f(z) = \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$  con  $Im \alpha > 0$  mappa il semipiano superiore del piano complesso  $z$  nel disco unitario  $|w| = 1$ . Il punto  $z = \alpha$  viene mappato nell'origine.

## 6 Trasformate di Fourier

### 6.1 Notazioni

L'integrale che utilizzeremo in questi capitoli è l'integrale di Lebesgue. L'integrale di Riemann permette di calcolare l'integrale di funzioni continue o di funzioni continue con un numero finito di discontinuità. Ci sono funzioni che non rientrano in questa classe: per esempio la funzione di Dirichlet, ovvero la funzione caratteristica dei razionali nell'intervallo  $(0,1)$ , che vale 1 nei razionali e zero in ogni punto irrazionale non è integrabile secondo Riemann. L'integrale di Lebesgue permetterà l'integrazione di una tale funzione ma soprattutto permetterà di passare a limite sotto il segno di integrale sotto ipotesi di natura abbastanza generale e non solo nel caso in cui la funzione da integrare è limite uniforme di una successione di funzioni continue come nel caso dell'integrazione secondo Riemann. La differenza fondamentale della costruzione dell'integrale di Lebesgue è a differenza di quello di Riemann i punti  $x$  non sono raggruppati rispetto alla vicinanza sull'asse  $x$  ma in base al criterio della vicinanza dei valori  $f(x)$ . In altre parole se  $f$  assume valori,  $y_1, y_2, \dots$  sia  $A_n = \{x : x \in A \ f(x) = y_n\}$  è allora

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n) \quad (6.1)$$

dove  $\mu(A_n)$  è la misura di Lebesgue di un insieme che è una generalizzazione della misura di un intervallo  $\mu([a, b]) = b - a$ .

Considereremo funzioni dello spazio di Lebesgue  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , ovvero funzioni integrabili in  $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| dx < \infty \quad (6.2)$$

o più in generale spazi di Lebesgue  $L^p(\mathbb{R}^n)$  per cui esiste

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx < \infty \quad 1 \leq p < \infty \quad (6.3)$$

Questi sono tutti spazi vettoriali e completi (di Banach) nella norma indotta dalla (6.3):

$$\|f\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (6.4)$$

In particolare tra questi ci interesseranno lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , che è uno spazio di Hilbert, e lo spazio  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , che è uno spazio di Banach con la norma

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx \quad (6.5)$$

Se  $x, y \in \mathbb{R}^n$  la notazione  $x \cdot y$  indicherà il prodotto scalare  $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ . Un *multiindice* sarà una ennupla di numeri positivi  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

Per ciascun multiindice considereremo l'operatore seguente di ordine  $|\alpha|$

$$D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (6.6)$$

con  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ . Abbiamo aggiunto il fattore  $(-i)^{|\alpha|}$  per convenienza. Se  $|\alpha| = 0$   $D^\alpha f = f$ .

Il simbolo  $x^\alpha$  denoterà  $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ .

Ricordiamo anche alcuni teoremi dell'integrazione di Lebesgue che ci saranno utili.

**Teorema della convergenza dominata di Lebesgue** Sia  $\{f_n\} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  una successione di funzioni tali che

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (6.7)$$

esista  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Se esiste una funzione  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  tale che  $|f_n(x)| \leq g(x)$  allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \quad (6.8)$$

**Teorema della derivazione sotto il segno di integrale** Se  $f(x, y)$  è una funzione integrabile in  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $y$  ed inoltre  $|\partial_y f(x, y)| \leq g(x)$  con  $g$  integrabile è

$$\partial_y \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_y f(x, y) dx \quad (6.9)$$

ovvero si puo' derivare sotto il segno di integrale.

## 6.2 Trasformata di Fourier per funzioni $L^1$

Possiamo definire la *trasformata di Fourier* di una funzione  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  come la funzione  $Ff: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ , definita da

$$Ff(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot y} dx \quad (6.10)$$

La funzione  $Ff(y)$  è in generale complessa. Il termine trasformata di Fourier viene anche usato per indicare il mapping  $f \rightarrow Ff$ . Dalla definizione segue che la trasformata di Fourier è un mapping lineare:

$$F(\alpha f + \beta g) = \alpha Ff + \beta Fg \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad (6.11)$$

La definizione (6.10) è consistente dato che

$$|f(x)e^{-ix \cdot y}| = |f| \quad (6.12)$$

Quindi se  $f$  è integrabile anche  $f(x)e^{-ix \cdot y}$  lo sarà.

Vale il seguente

**Teorema** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , allora

$$i) \quad (Ff(x-a))(y) = Ff(y)e^{-iy \cdot a} \quad (6.13)$$

$$ii) \quad F(f(x)e^{ia \cdot x})(y) = Ff(y-a) \quad (6.14)$$

$$iii) \quad \text{se } \alpha \in \mathbb{R} \neq 0 \quad (Ff(\alpha x))(y) = \frac{1}{|\alpha|^n} Ff(y/\alpha) \quad (6.15)$$

Dimostrazione.

i) Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  anche  $f(x-a) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Dalla (6.10) segue, facendo un cambiamento di variabile nell'integrale,

$$(Ff(x-a))(y) = (2\pi)^{-n/2} \int f(x-a)e^{-ix \cdot y} dx = Ff(y)e^{-iy \cdot a} \quad (6.16)$$

ii) Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  anche  $f e^{ia \cdot x} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , quindi

$$F(f(x)e^{ia \cdot x})(y) = (2\pi)^{-n/2} \int f(x)e^{ia \cdot x} e^{-ix \cdot y} = Ff(y-a) \quad (6.17)$$

iii) Basta una ridefinizione nella variabile di integrazione.

**Teorema** Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , allora  $Ff$  è una funzione limitata.

Dimostrazione. Si ha

$$|Ff(y)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int |f(x)| dx = (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1 \quad (6.18)$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  e  $\|f\|_1$  denota la norma di  $f$  in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

### 6.3 Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Definiamo lo spazio delle *funzioni a rapida decrescita (spazio di Schwartz)*  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  come quel sottoinsieme di  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  costituito dalle funzioni  $f$  per cui

$$x^\beta \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f \quad \forall \alpha, \beta \quad \text{multiindici} \quad (6.19)$$

è limitata. Sono quindi funzioni infinitamente derivabili che vanno a zero all'infinito, insieme alle loro derivate di ogni ordine, più rapidamente di ogni potenza. Queste funzioni formano uno spazio vettoriale. Questo spazio contiene come sottospazio  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , ovvero lo spazio delle funzioni  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  con supporto compatto.

Poichè lo spazio di Schwartz è contenuto in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  (anzi  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  è *denso* in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ ), la definizione (6.10) ha senso anche per funzioni in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Ricordiamo che un insieme  $A$  è denso in  $B$  se la chiusura di  $A$  contiene  $B$ .

Mostreremo che la trasformata di Fourier è un map uno a uno di  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . In seguito utilizzeremo una procedura limite con funzioni  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  per definire la trasformata di Fourier per funzioni in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  perché in generale una funzione in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  può non essere  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Teorema** Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$i) \quad D^\alpha Ff = (-1)^{|\alpha|} F(M^\alpha f) \quad (6.20)$$

dove

$$(M^\alpha f)(x) = x^\alpha f(x) \quad (6.21)$$

$$ii) \quad (FD^\alpha f)(y) = y^\alpha (Ff)(y) \quad (6.22)$$

iii)  $F$  è una trasformazione lineare da  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Le proposizioni i) e ii) valgono anche per  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  purché  $D^\alpha f, M^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Dimostrazione.** i) Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  anche  $M^\alpha f$  sarà in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . D'altra parte

$$|D_y^\alpha f(x)e^{-ix \cdot y}| = |(-1)^{|\alpha|} x^\alpha f(x)e^{-ix \cdot y}| = |x^\alpha f(x)| \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (6.23)$$

Quindi posso derivare sotto il segno di integrale la (6.10) ottenendo il risultato.

ii) Si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned} (FD^\alpha f)(y) &= (2\pi)^{-n/2} \int D_x^\alpha f(x) e^{-ix \cdot y} dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} (2\pi)^{-n/2} \int y^\alpha (-i)^{2|\alpha|} f(x) e^{-ix \cdot y} dx = y^\alpha (Ff)(y) \end{aligned}$$

Il termine agli estremi è nullo perché  $f \in \mathcal{S}$ .

iii) Infatti

$$|y^\alpha D_y^\beta Ff(y)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int |D_x^\alpha x^\beta f(x)| dx < \infty \quad (6.24)$$

dove abbiamo usato le (6.20),(6.22) e il fatto che  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Esempio** Consideriamo la trasformata di Fourier in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  e calcoliamo

$$\frac{d}{dy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ixy} dx \quad (6.25)$$

Dato che  $xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$  possiamo derivare sotto il segno di integrale ed otteniamo

$$\frac{d}{dy} Ff(y) = -iF(xf) \quad (6.26)$$

che coincide con la (6.20) con  $|\alpha| = 1$ . Inoltre, integrando per parti,

$$\int \frac{d}{dx} f(x) e^{-ixy} dx = iy \int f(x) e^{-ixy} dx \quad (6.27)$$

da cui

$$F[-i \frac{d}{dx} f](y) = yFf(y) \quad (6.28)$$

che coincide con la (6.22) con  $|\alpha| = 1$ . In questa ultima dimostrazione abbiamo utilizzato la proprietà di  $f$  di andare a zero per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Se  $f \in L^1$  la proprietà (6.22) continua a valere se anche  $f' \in L^1$ . In questo caso si può infatti dimostrare che  $f$  va a zero per  $x \rightarrow \pm\infty$ .

**Teorema (di Riemann-Lebesgue)** La trasformata di Fourier è una applicazione da  $L^1(\mathbf{R}^n)$  nello spazio di Banach delle funzioni limitate e continue che tendono a zero all'infinito. Questo spazio ha come norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |f(x)| \quad (6.29)$$

Dimostrazione. Abbiamo già visto che  $Ff$  è limitata. Ad ogni  $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$  dato che  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  è denso in  $L^1(\mathbf{R}^n)$ , corrisponde una successione  $\{f_i\} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  tale che

$$\|f - f_i\|_1 \rightarrow 0 \quad (6.30)$$

per  $i \rightarrow \infty$ . Poichè

$$|(Ff - Ff_i)(y)| \leq (2\pi)^{-n/2} \|f - f_i\|_1 \quad (6.31)$$

$Ff_i$  tende uniformemente a  $Ff$ .  $Ff$  limite uniforme di funzioni continue e tendenti a zero all'infinito, è continua e tende a zero all'infinito. Basta sfruttare la diseguaglianza

$$|Ff| \leq |Ff - Ff_i| + |Ff_i| \quad (6.32)$$

per dimostrare che  $Ff$  va a zero all'infinito (ricordando che  $Ff_i \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ ). In modo analogo si può dimostrare che  $Ff$  è continua.

Nota Dalla (6.22) segue che se  $f \in L^1(\mathbf{R})$  è derivabile  $k$  volte la sua trasformata di Fourier va a zero più rapidamente di  $1/|y|^k$ . Infatti

$$|Ff| = \frac{|Ff^{(k)}|}{|y|^k} \leq \frac{M}{|y|^k} \quad (6.33)$$

dove abbiamo usato la limitatezza di  $Ff^{(k)}$ .

**Esempio** Trasformata di Fourier della funzione

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \text{ se } |x| \leq a \\ &= 0 \text{ se } |x| > a \end{aligned}$$

La trasformata di Fourier è data da

$$\begin{aligned} Ff(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-ixy}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \frac{\sin ya}{y} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ya}{y} \end{aligned}$$

Quindi  $|Ff(y)| \rightarrow 0$  quando  $y \rightarrow \infty$ .

**Esempio** Trasformata di Fourier della gaussiana. Consideriamo la funzione  $\phi(x) = \exp(-x^2/2)$ . La funzione  $\phi \in \mathcal{S}$ . Si verifica che  $F\phi = \phi$  e  $\phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F\phi(y)dy$ .

Infatti la funzione  $\phi$  soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx}\phi + x\phi = 0 \quad (6.34)$$

Se consideriamo la trasformata di Fourier dell'equazione, tenendo conto che

$$(F\frac{d\phi}{dx})(y) = iyF\phi(y) \quad (6.35)$$

e

$$F(x\phi)(y) = i\frac{d}{dy}F\phi(y) \quad (6.36)$$

otteniamo

$$yF\phi(y) + \frac{d}{dy}F\phi(y) = 0 \quad (6.37)$$

Quindi dovrà essere

$$\frac{F\phi}{\phi} = cost \quad (6.38)$$

Poichè  $\phi(0) = 1$  e poichè

$$F\phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2/2)dx = 1 \quad (6.39)$$

segue  $cost = 1$  e quindi

$$F\phi = \phi \quad (6.40)$$

## 6.4 Formula di inversione

**Teorema di inversione i)** Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  allora

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int Ff(y)e^{iy \cdot x} dy \quad (6.41)$$

ii) La trasformata di Fourier  $F$  è un mapping lineare uno a uno da  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ . Inoltre  $F^2 f(x) = f(-x)$ ,  $F^4 = I$ .

iii) Se  $f, Ff \in L^1(\mathbf{R}^n)$  e

$$f_0(x) = (2\pi)^{-n/2} \int Ff(y)e^{iy \cdot x} dy \quad (6.42)$$

$f = f_0$  quasi ovunque (ovvero tranne in un insieme di misura nulla).

Dimostrazione. i) Se  $h, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$  applicando il teorema di Fubini all'integrale

$$\int h(w)g(y)e^{-iw \cdot y} dw dy \quad (6.43)$$

si ottiene

$$\int Fh(y)g(y) dy = \int h(w)Fg(w) dw \quad (6.44)$$

Per dimostrare i) consideriamo  $g \in \mathcal{S}$  e sia  $g(y) = \phi(\epsilon y)$ , dove  $\phi$  è la gaussiana e  $\epsilon > 0$ . E' allora

$$(F\phi(\epsilon y))(w) = \frac{1}{\epsilon^n} (F\phi)\left(\frac{w}{\epsilon}\right) \quad (6.45)$$

Inoltre sia  $h(w) = f(w+x)$  con  $f \in \mathcal{S}$ . Avremo, sfruttando  $Fh(y) = Ff(y) \exp(ixy)$ ,

$$\begin{aligned} \int h(w)Fg(w) dw &= \int Fh(y)g(y) dy = \int (Ff)(y)e^{ix \cdot y} \phi(\epsilon y) dy \\ &= \int f(w+x)(F\phi(\epsilon y))(w) dw \\ &= \epsilon^{-n} \int f(w+x)(F\phi)\left(\frac{w}{\epsilon}\right) dw \\ &= \int f(\epsilon y + x)\phi(y) dy \end{aligned}$$

D'altra parte per il teorema della convergenza dominata ( $f$  e  $\phi$  sono limitate)

$$\begin{aligned} f(x) &= (2\pi)^{-n/2} f(x) \int \phi(y) dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-n/2} \int f(\epsilon y + x)\phi(y) dy \\ &= (2\pi)^{-n/2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int (Ff)(y)e^{ix \cdot y} \phi(\epsilon y) dy \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int (Ff)(y)e^{ix \cdot y} dy \end{aligned}$$

Per dimostrare ii) osserviamo che la formula di inversione (6.41) in  $\mathcal{S}$  implica che il mapping è uno a uno dato che  $Ff = 0$  implica  $f = 0$ . Inoltre se consideriamo la formula di inversione ne ricaviamo

$$F(Ff)(-x) = f(x) \quad (6.46)$$

e pertanto  $F^2f(x) = f(-x)$ . Infine  $F^4f = f$ .

Per dimostrare iii) ripartiamo da (6.44). Sia  $h = f \in L^1$  e  $g \in \mathcal{S}$ . Abbiamo

$$\begin{aligned}\int f(x)(Fg)(x)dx &= \int (Ff)(y)g(y)dy \\ &= \int (Ff)(y)(2\pi)^{-n/2} \int Fg(x)e^{iy \cdot x}dxdy \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int (Fg)(x) \int (Ff)(y)e^{iy \cdot x}dydx \\ &= \int (Fg)(x)f_0(x)dx\end{aligned}$$

dove abbiamo usato Fubini e la definizione di  $f_0(x)$ . Ovvero

$$\int (f_0 - f)(x)Fg(x)dx = 0 \quad (6.47)$$

da cui dato che per ii)  $Fg$  copre tutto  $\mathcal{S}$  e dato che  $\mathcal{S} \supset \mathcal{D}$ , essendo  $\mathcal{D}$  lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto, ne segue [8]

$$f = f_0 \text{ quasi ovunque (q.o.)} \quad (6.48)$$

Dalla (6.48) segue il

**Teorema di unicità** Se due funzioni hanno la stessa trasformata di Fourier esse sono uguali q.o.

**Teorema dell'inversione in  $\mathbb{R}$**  Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  ed è una funzione a variazione limitata in un intorno di  $x$  allora

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = (2\pi)^{-1/2}P.V. \int_{-\infty}^{\infty} (Ff)(y)e^{ix \cdot y}dy \quad (6.49)$$

dove

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k \quad (6.50)$$

Inoltre  $f(x \pm 0)$  denota il limite destro e sinistro. Se la funzione è continua il primo membro della (6.49) è evidentemente  $f(x)$ . Ricordiamo che una  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è a variazione limitata se, per ogni partizione dell'intervallo  $[a, b]$ ,  $\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$  è limitata.

Dimostrazione. [9]

## 6.5 Prodotto di convoluzione

Date due funzioni complesse  $f$  e  $g$  definite in  $\mathbb{R}^n$  definiamo *prodotto di convoluzione* la funzione

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \quad (6.51)$$

purchè l'integrale esista nel senso di Lebesgue per tutti (o quasi tutti) gli  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Il prodotto di convoluzione, se esiste, è commutativo:

$$f * g = g * f \quad (6.52)$$

Infatti

$$\int f(y)g(x-y)dy = \int f(x-z)g(z)dz \quad (6.53)$$

(abbiamo fatto il cambiamento di variabile  $z = x - y$ ).

**Teorema** Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  e  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  il prodotto di convoluzione esiste ed inoltre  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Dimostrazione. [4]

**Teorema** Se  $f, g$  e  $Fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , allora

$$\begin{aligned} i) \quad & F(fg) = (2\pi)^{-n/2} Ff * Fg \\ ii) \quad & \int \bar{f}g dx = \int \overline{Ff} Fg dx \end{aligned} \quad (6.54)$$

Dimostrazione. i) Se

$$g_0(x) = (2\pi)^{-n/2} \int Fg(u) e^{iu \cdot x} du \quad (6.55)$$

abbiamo

$$F(fg)(y) = F(fg_0)(y) = (2\pi)^{-n} \int f(x) \int Fg(u) e^{iu \cdot x} e^{-iy \cdot x} du dx \quad (6.56)$$

Applicando il teorema di Fubini

$$\begin{aligned} F(fg)(y) &= (2\pi)^{-n} \int Fg(u) \int f(x) e^{-ix(y-u)} dx du \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int Fg(u) Ff(y-u) du \\ &= (2\pi)^{-n/2} [Ff * Fg](y) \end{aligned}$$

ii) Da i) con  $\bar{f}$  al posto di  $f$  otteniamo

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-n/2} \int \bar{f}(x)g(x)dx &= F(\bar{f}g)(0) \\ &= (2\pi)^{-n/2} [\bar{Ff} * Fg](0) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int F\bar{f}(-u) Fg(u) du \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int \overline{Ff(u)} Fg(u) du \end{aligned}$$

La ii) è nota anche come *formula di Parseval*. Nel caso in cui  $f = g$  diventa

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |Ff(y)|^2 dy \quad (6.57)$$

**Teorema** Se  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$F(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} Ff Fg \quad (6.58)$$

Dimostrazione. Per il teorema visto precedentemente  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . D'altra parte

$$\begin{aligned} F(f * g)(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int \int f(y)g(u-y)dy e^{-ix \cdot u} du \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int f(y) \int g(u-y)e^{-ix \cdot (u-y)} du e^{-ix \cdot y} dy \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} Ff(x) Fg(x) \end{aligned}$$

## 6.6 Trasformata di Fourier per funzioni $L^2$ .

Lo spazio  $L^2(\mathbb{R}^n)$  è lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile, ovvero tali che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx < \infty \quad (6.59)$$

Questo spazio ha la struttura di spazio di Hilbert ovvero ha un prodotto scalare definito da

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} g dx \quad (6.60)$$

che induce una norma

$$\|f\|_2 = \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.61)$$

In generale tra  $L^2$  ed  $L^1$  non c'è una relazione definita.

Nel caso in cui la misura sia su un intervallo finito  $\Omega$ , vale  $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ . Infatti dato che vale la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\int \bar{f} g dx|^2 \leq \int |f|^2 dx \int |g|^2 dx \quad (6.62)$$

scegliendo  $g = 1$  si ha

$$|\int f dx|^2 \leq \int |f|^2 dx M \quad (6.63)$$

se  $M$  è la misura dell'intervallo finito  $\Omega$ . Quindi se  $f \in L^2(\Omega)$ , è anche  $f \in L^1(\Omega)$ , ovvero  $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ . In questo caso possiamo usare per le funzioni in  $L^2$  la definizione di trasformata di Fourier in  $L^1$ .

Poichè la misura di Lebesgue di  $\mathbb{R}^n$  è infinita,  $L^2(\mathbb{R}^n)$  non è un sottoinsieme di  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

In generale se  $f \in L^1 \cap L^2$  possiamo quindi ancora usare la definizione data in  $L^1$  e inoltre in questo caso si ha

$$\int |Ff|^2 dx = \int |f|^2 dx \quad (6.64)$$

e quindi

$$Ff \in L^2 \quad (6.65)$$

L'applicazione  $F$  è quindi una isometria

$$\langle Ff, Ff \rangle = \langle f, f \rangle \quad \forall f \in L^1 \cap L^2 \quad (6.66)$$

E' possibile estendere questa isometria a tutto  $L^2$  col seguente

**Teorema di Plancherel** Ad ogni  $f \in L^2$  è possibile associare una  $Ff \in L^2$  tale che

i) se  $f \in L^1 \cap L^2$   $Ff$  è la trasformata definita in  $L^1$ .

ii)  $\int |Ff|^2 dx = \int |f|^2 dx$

iii) l'applicazione  $f \rightarrow Ff$  è un isometria  $L^2 \rightarrow L^2$

iv) se  $\{f_A\}$  è una successione di funzioni in  $L^1 \cap L^2$  tendenti a  $f$ , allora  $Ff_A$  tende a  $Ff$ , ovvero

$$\|Ff_A - Ff\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{per } A \rightarrow \infty \quad (6.67)$$

dove la norma è quella in  $L^2$ .

v) se  $\psi_A(x) = (2\pi)^{-n/2} \int Ff_A(y) \exp(ix \cdot y) dy$

$$\|\psi_A - f\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{per } A \rightarrow \infty \quad (6.68)$$

Dimostrazione [4, 7] La successione  $\{f_A \in L^1 \cap L^2\}$  può esser ottenuta a partire da  $f$  considerando  $f_A = f\chi_{Q_A}$  dove  $\chi_{Q_A}$  è la funzione caratteristica dell'insieme  $Q_A$

$$Q_A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid -A \leq x_i \leq A\} \quad (6.69)$$

## 6.7 Teorema dell'interpolazione

Un amplificatore è un dispositivo che riceve un segnale funzione del tempo  $s(t)$  e rilascia una risposta  $r(t)$ . Nei casi più semplici  $r(t) = ks(t)$ . Se sovrapponiamo due segnali,

$$s(t) = a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) \quad (6.70)$$

la risposta sarà

$$r(t) = a_1 k s_1(t) + a_2 k s_2(t) \quad (6.71)$$

In generale il segnale sarà distorto e la relazione tra  $s(t)$  e  $r(t)$  sarà più complessa.

Consideriamo un segnale con frequenza  $\omega$ ,  $s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega t}$ . In generale la risposta sarà proporzionale a  $s(t)$  ma con un'ampiezza ed una fase modificata. Per semplicità assumiamo la stessa fase; allora

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}G(\omega)e^{i\omega t} = G(\omega)s(t) \quad (6.72)$$

$G(\omega)$  è detto *guadagno*.

Più in generale il segnale sarà

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (6.73)$$

dove nelle nostre notazioni  $S(\omega) = Fs(\omega)$ , ovvero  $S(\omega)$  è la trasformata di Fourier di  $s(t)$ . La risposta alla frequenza  $\omega$  sarà

$$R(\omega) = S(\omega)G(\omega) = Fs(\omega)Fg(\omega) \quad (6.74)$$

e

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega)e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Fs(\omega)Fg(\omega)e^{i\omega t} d\omega \\ &= [F^{-1}(FsFg)](t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(s * g)(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)g(t - \tau)d\tau \end{aligned} \quad (6.75)$$

dove abbiamo fatto uso del teorema sulla trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione (6.54),

$$F(f * g) = \sqrt{2\pi}FfFg \quad (6.76)$$

Quindi la risposta è data dal prodotto di convoluzione del segnale con il guadagno.

In generale la funzione  $G(\omega) = Fg(\omega)$  ovvero il guadagno è zero (trascurabile) al di fuori di un intervallo finito di frequenze, quindi è una funzione a *supporto limitato*.

Un dispositivo che soddisfa le (6.73), (6.74), (6.75) è detto un *filtro lineare*.

**Teorema dell'interpolazione (campionatura)** Sia  $f$  una funzione continua e la sua trasformata di Fourier  $Ff$  sia a supporto compatto ( $Ff(\omega) = 0$ ,  $|\omega| \geq L$ ). Allora

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-n\frac{\pi}{L}) \frac{\sin(n\pi + Lt)}{n\pi + Lt} \quad (6.77)$$

Dimostrazione. Dato che  $f$  è continua, dalla (6.49)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Ff(\omega)e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L Ff(\omega)e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (6.78)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che la  $Ff$  è a supporto compatto.

D'altra parte  $Ff(-L) = Ff(L) = 0$ , quindi possiamo estendere la funzione per periodicità a  $(-\infty, \infty)$ . Denotiamo la funzione così ottenuta ancora con  $Ff(\omega)$ .  $Ff(\omega)$  è una funzione periodica con periodo  $2L$  e può esser rappresentata come serie di Fourier uniformemente convergente

$$(Ff)(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\frac{\pi}{L}\omega} \quad (6.79)$$

Per ricavare gli  $a_n$  basta moltiplicare per

$$e^{-ip\frac{\pi}{L}\omega} \quad (6.80)$$

ed integrare in  $\omega$  tra  $[-L, L]$ .

$$\int_{-L}^L (Ff)(\omega) e^{-ip\frac{\pi}{L}\omega} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{-L}^L e^{i(n-p)\frac{\pi}{L}\omega} d\omega \quad (6.81)$$

dove abbiamo usato l'uniforme convergenza della serie per scambiare il simbolo di sommatoria con quello di integrale. Ma se  $n \neq p$  troviamo

$$\int_{-L}^L e^{i(n-p)\frac{\pi}{L}\omega} d\omega = 0 \quad (6.82)$$

Mentre per  $n = p$  abbiamo

$$\int_{-L}^L (Ff)(\omega) e^{-ip\frac{\pi}{L}\omega} d\omega = 2La_p \quad (6.83)$$

e quindi

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L (Ff)(\omega) e^{-ip\frac{\pi}{L}\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\pi}{2}} f(-p\frac{\pi}{L}) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la formula dell'inversione (6.78). Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\frac{\pi}{L}\omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-n\frac{\pi}{L}) \int_{-L}^L e^{i(n\frac{\pi}{L}+t)\omega} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-n\frac{\pi}{L}) \frac{\sin(n\pi + Lt)}{n\pi + Lt} \end{aligned}$$

Possiamo quindi ricostruire la funzione dai suoi valori in una infinità numerabile di punti, o in un numero finito di punti se essa è a supporto compatto.

# 7 Trasformate di Laplace

## 7.1 Notazioni e proprietà

Quando abbiamo definito la trasformata di Fourier in  $\mathbb{R}^n$  abbiamo considerato funzioni assolutamente integrabili. Questo esclude funzioni che crescono come  $f(t) = e^t$  in  $\mathbb{R}$ . La trasformata di Laplace permette di trattare alcune di queste funzioni. Più in particolare considereremo funzioni  $f(t)$  tali che

$$f(t) = 0 \quad -\infty < t < 0 \quad (7.1)$$

e per cui esiste una costante reale  $a$  tale che

$$f(t)e^{-at} \quad (7.2)$$

è assolutamente integrabile in  $[0, \infty)$ .

Sia  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ . Si dice *trasformata di Laplace* della funzione  $f$  la funzione

$$\mathcal{L}f(z) \equiv \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \quad (7.3)$$

quando l'integrale esiste.

Per esempio se  $f$  è localmente integrabile in  $\mathbb{R}_+$  ed è tale che

$$|f(t)| \leq M e^{at} \quad \text{per } t \geq t_0 \quad (7.4)$$

allora esiste la trasformata di Laplace per ogni  $z$  tale che  $\operatorname{Re} z > a$ . Infatti è

$$|\mathcal{L}f(z)| \leq \int_0^{t_0} |f(t)| e^{-\operatorname{Re}(z)t} dt + M \int_{t_0}^\infty e^{-\operatorname{Re}(z-a)t} dt \quad (7.5)$$

Indicheremo con  $\alpha_f$  l'estremo inferiore dei valori  $\{x = \operatorname{Re}(z) | e^{-zt} f(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)\}$ .  $\alpha_f$  è detta *ascissa di assoluta convergenza*, perché l'integrale esiste per ogni  $z$  con  $\operatorname{Re}(z) > \alpha_f$ . Il semipiano  $\operatorname{Re}(z) > \alpha_f$  è il *semipiano di assoluta convergenza*.

**Esempio** La funzione  $f(t) = 1$  su  $\mathbb{R}_+$ . E'

$$\mathcal{L}1(z) = \int_0^\infty e^{-zt} dt = \frac{1}{z} \quad (7.6)$$

L'integrale esiste purché  $\operatorname{Re} z > 0$ . In questo semipiano la funzione trasformata di Laplace è analitica.

**Esempio** La funzione  $f(t) = e^{i\omega t}$ .

$$\mathcal{L}(e^{i\omega t})(z) = \int_0^\infty e^{-zt} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{z - i\omega} \quad (7.7)$$

purché  $\operatorname{Re} z > 0$ . In questo semipiano la funzione trasformata di Laplace è analitica.

Possiamo dimostrare anche nel caso della trasformata di Laplace delle semplici proprietà.

i) Linearità.

$$\mathcal{L}[a_1 f_1 + a_2 f_2](z) = a_1 \mathcal{L}[f_1](z) + a_2 \mathcal{L}[f_2](z) \quad (7.8)$$

Questa proprietà vale ovviamente nel semipiano in cui entrambe le trasformate di Laplace sono definite, ovvero

$$\alpha_{a_1 f_1 + a_2 f_2} = \max\{\alpha_{f_1}, \alpha_{f_2}\} \quad (7.9)$$

ii)

$$\mathcal{L}[f(t)e^{at}](z) = \mathcal{L}[f](z - a) \quad (7.10)$$

ma con ascissa di assoluta convergenza uguale a  $\alpha_f + \operatorname{Re} a$ .

Analogamente, se  $\tau > 0$ ,

$$\begin{aligned} e^{-z\tau} \mathcal{L}[f](z) &= \int_0^\infty e^{-z(s+\tau)} f(s) ds \\ &= \int_{-\tau}^\infty e^{-zt} f(t - \tau) dt \\ &= \mathcal{L}[f(t - \tau)\theta(t - \tau)](z) \end{aligned}$$

Questa proprietà non vale per  $\tau$  negativo. Si ha (per  $\tau > 0$ )

$$\begin{aligned} e^{z\tau} \mathcal{L}[f](z) &= \int_0^\infty e^{-z(t'-\tau)} f(t') dt' \\ &= \int_{-\tau}^\infty e^{-zt} f(t + \tau) dt \\ &= \mathcal{L}[f(t + \tau)\theta(t + \tau)](z) + \int_{-\tau}^0 e^{-zt} f(t + \tau) dt \end{aligned}$$

Vale solo se  $f(t) = 0$  anche per  $0 \leq t \leq \tau$ .

**Teorema** Se  $f$  ha per trasformata di Laplace  $\mathcal{L}f$  con ascissa di assoluta convergenza uguale a  $\alpha_f$ ,  $(-t)^n f$  ha la stessa ascissa di assoluta convergenza. Inoltre  $\mathcal{L}f$  è olomorfa e vale

$$\frac{d^n}{dz^n} \mathcal{L}[f](z) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)](z) \quad (7.11)$$

**Dimostrazione** Dimostriamo prima che il prodotto  $t^n f(t)$  ha ascissa di assoluta convergenza  $\alpha'$  uguale ad  $\alpha_f$ . Per ogni  $n$  intero ed  $\epsilon > 0$  arbitrario esiste  $t_0$  tale che

$$t^n < e^{\epsilon t} \quad t > t_0 \quad (7.12)$$

Quindi la trasformata di Laplace di  $t^n f(t)$  esiste per ogni  $z$  con  $\operatorname{Re} z > \alpha_f + \epsilon$ . Dall'arbitrarietà di  $\epsilon$  segue  $\alpha' \leq \alpha_f$ . D'altra parte dalla sommabilità in  $\mathbb{R}_+$  della funzione

$$t^n f(t) e^{-zt} \quad (7.13)$$

segue la sommabilità della  $fe^{-zt}$ , dato che

$$|f(t)e^{-zt}| \leq |t^n f(t)e^{-zt}| \quad t \in [1, \infty) \quad (7.14)$$

Quindi e' anche  $\alpha_f \leq \alpha'$  e quindi  $\alpha' = \alpha_f$ . Possiamo allora derivare la (7.3), sotto il segno di integrale, dato che  $t^n f(t) e^{-zt}$  è integrabile ed ottenere il risultato.

**Esempio** Dalla (7.6), utilizzando la (7.11) e derivando  $n$  volte si ottiene

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{z^{n+1}} \quad Re(z) > 0 \quad (7.15)$$

Si può poi estendere la precedente equazione per potenze qualsiasi e si ottiene

$$\mathcal{L}[t^\nu](z) = \int_0^\infty t^\nu e^{-zt} dt = \frac{\Gamma[\nu + 1]}{z^{\nu+1}} \quad Re(z) > 0 \quad Re(\nu) > -1 \quad (7.16)$$

La richiesta  $Re(\nu) > -1$  è necessaria perchè l'integrale non diverga nell'origine.

Per valori di  $z$  reali e positivi ( $z = x > 0$ ) dalla (7.16) si ottiene

$$\mathcal{L}[t^\nu](z) = \int_0^\infty t^\nu e^{-xt} dt = \frac{1}{x^{\nu+1}} \int_0^\infty s^\nu e^{-s} ds = \frac{\Gamma[\nu + 1]}{x^{\nu+1}} \quad (7.17)$$

Si ottiene quindi la (7.16) la cui validità può poi estendersi per continuazione analitica per qualsiasi  $z$  con  $Re(z) > 0$ , utilizzando la rappresentazione integrale della Gamma di Eulero (4.26).

**Teorema** Sia  $f$  derivabile  $n$  volte e  $\mathcal{L}[f^{(k)}]$   $k = 0, 1, \dots, n$  siano le corrispondenti trasformate di Laplace con  $\alpha_k$  le corrispondenti ascisse di assoluta convergenza. Allora  $\forall k = 0, 1, \dots$  esiste finito

$$f^{(k)}(0) \equiv \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(k)}(t) \quad (7.18)$$

e vale

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](z) = z^n \mathcal{L}[f](z) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (7.19)$$

$$\forall z |Re(z) > max\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}.$$

Dimostrazione Cominciamo col considerare

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right](z) = \int_0^\infty e^{-zt} \frac{d}{dt} f(t) dt \quad (7.20)$$

Integrando per parti si ha

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right](z) = e^{-zt} f(t)|_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \quad (7.21)$$

purché  $Re(z) > max\{\alpha_0, \alpha_1\}$ . Inoltre devono esistere finiti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-zt} f(t) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-zt} f(t) \quad (7.22)$$

dato che nella (7.21) tutti i restanti termini sono finiti.

Ma se  $Re(z) > max\{\alpha_0, \alpha_1\}$ , vale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-zt} f(t) = 0 \quad (7.23)$$

Infatti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-zt} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(z-z_0)t} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-z_0 t} f(t) \quad (7.24)$$

D'altra parte se  $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0) > \max\{\alpha_0, \alpha_1\}$ , vale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(z-z_0)t} = 0 \quad (7.25)$$

Pertanto tenuto conto che  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-zt} f(t)$  è finito ne segue

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-zt} f(t) = 0 \quad (7.26)$$

Quindi

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] (z) = z \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt - f(0) \quad (7.27)$$

Iterando il procedimento si ottiene la formula generale.

## 7.2 Formula di inversione

Per trovare questa relazione conviene prima vedere la relazione tra la trasformata di Laplace e quella di Fourier. Dalla definizione segue

$$\mathcal{L} f(x + iy) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) f(t) e^{-xt} e^{-iyt} dt = F[\sqrt{2\pi} \theta(t) f(t) e^{-xt}](y) \quad (7.28)$$

dove  $\theta(t)$  è la funzione di Heaviside. Dalla proprietà di unicità della trasformata di Fourier segue una proprietà analoga per quella di Laplace. Quindi se due funzioni hanno la stessa trasformata di Laplace esse sono uguali q.o.

**Teorema** Se la  $f$  è a variazione limitata in un intorno di  $t > 0$ , e se  $\mathcal{L}f$  denota la sua trasformata di Laplace, vale

$$\frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)] = \frac{1}{2\pi i} V.P. \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \mathcal{L}f(z) e^{zt} dz \quad \forall x > \alpha_f \quad (7.29)$$

dove l'integrazione è estesa ad una qualsiasi parallela all'asse immaginario del piano complesso  $z$  contenuta nel semipiano di assoluta convergenza di  $\mathcal{L}f$ :

$$V.P. \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} g(z) = i \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k g(x+iy) dy \quad (7.30)$$

Dimostrazione Dalla formula di inversione della trasformata di Fourier (6.49), segue

$$\frac{1}{2} \sqrt{2\pi} e^{-xt} [\theta(t+0)f(t+0) + \theta(t-0)f(t-0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k \mathcal{L}f(x+iy) e^{iyt} dy \quad (7.31)$$

e quindi per  $t > 0$

$$\frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)] = \frac{1}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k \mathcal{L}f(x+iy) e^{(x+iy)t} dy$$

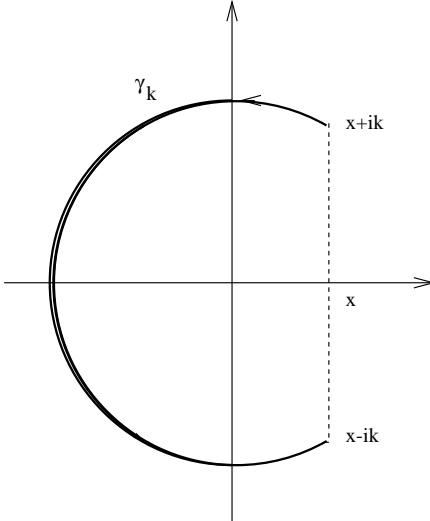


Figura 9: Se  $|\mathcal{L}f| < M_k$  su una successione di archi di circonferenza  $\gamma_k$  a partire dalla retta  $x$ , con  $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = 0$ , è possibile utilizzare il lemma di Jordan e chiudere il cammino di integrazione nel semipiano a sinistra di  $z = x$ .

$$= \frac{1}{2\pi i} V.P. \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \mathcal{L}f(z) e^{zt} dz$$

Nota La (7.29) è nota come *formula di inversione complessa di Riemann*. L'integrazione è estesa rispetto ad una qualsiasi parallela all'asse immaginario nel piano  $z$  contenuta nel semipiano di assoluta convergenza di  $\mathcal{L}f$ , dove la funzione  $\mathcal{L}f$  è analitica. Inoltre se  $|\mathcal{L}f| < M_k$  su una successione di archi di circonferenza  $\gamma_k$  (non passanti per le eventuali singolarità di  $\mathcal{L}f$ ) a partire dalla retta  $x$  come in Fig. 9, con  $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = 0$ , è possibile utilizzare il lemma di Jordan e chiudere il cammino di integrazione nel semipiano a sinistra di  $z = x$ . Applicando il teorema dei residui si trova allora

$$\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)] = \sum_{sing.is.} Res[\mathcal{L}f(z)e^{zt}] \quad (7.32)$$

dove la somma è estesa alle singolarità isolate della funzione  $\mathcal{L}f(z)$ .

**Esempio** La funzione  $f(t) = \sinh kt$  ha per trasformata di Laplace  $\mathcal{L}f(z) = \frac{k}{z^2 - k^2}$  per  $Re z > k$ . Questa funzione ha due poli semplici in  $z = \pm k$ . Quindi per calcolarne l'antitrasformata dobbiamo calcolare

$$\sum Res_{\pm k} \left[ \frac{k}{z^2 - k^2} e^{zt} \right] = \frac{ke^{kt}}{2k} + \frac{ke^{-kt}}{-2k} = \sinh kt \quad (7.33)$$

### 7.3 Prodotto di convoluzione

Se  $f, g$  sono funzioni da  $\mathbf{R}_+$  in  $\mathbf{C}$ , dalla definizione di prodotto di convoluzione segue che

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (7.34)$$

dato che  $g(t - \tau) = 0$  se  $\tau > t$ .

Vale il seguente

**Teorema** Se  $f, g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\mathcal{L}(f)$  e  $\mathcal{L}(g)$  denotano le rispettive trasformate di Laplace è

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g \quad \text{per } \alpha > \max \alpha_f, \alpha_g \quad (7.35)$$

Infatti da

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-zt} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt &= \int_0^\infty f(\tau) \int_0^\infty e^{-zt} g(t-\tau)dt d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau) e^{-z\tau} \int_0^\infty e^{-z(t-\tau)} g(t-\tau)dt d\tau \\ &= \mathcal{L}f(z) \cdot \mathcal{L}g(z) \end{aligned}$$

## 7.4 Sviluppi asintotici

Data una funzione  $f$  reale o complessa è conveniente a volte conoscerne lo sviluppo asintotico, per esempio per  $x \rightarrow \infty$ .

**Definizione** Data la successione di funzioni  $\{\phi_n\}$  (reali o complesse) la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x) \quad (7.36)$$

è detta *sviluppo asintotico* di una funzione  $f(x)$  in  $x_0$  e scriveremo

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x) \quad x \rightarrow x_0 \quad (7.37)$$

se

$$\begin{aligned} i) \quad & \frac{\phi_{n+1}(x)}{\phi_n(x)} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow x_0 \\ ii) \quad & \frac{f(x) - \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(x)}{\phi_N(x)} \rightarrow 0 \quad \forall N \quad x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

Questa definizione è una generalizzazione di quella dovuta a Poincaré.

Vista come serie infinita la (7.37) può esser convergente o divergente. In altre parole la combinazione  $[f(x) - \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(x)]/\phi_N(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow x_0$  ma non è detto che  $[f(x) - \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(x)]/\phi_N(x)$  vada a zero per  $N \rightarrow \infty$ .

Nel caso di una serie di potenze la proprietà *i*) è soddisfatta automaticamente.

Consideriamo la formula della trasformata di Laplace

$$\int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt \quad (7.38)$$

Ci aspettiamo che per grandi valori di  $x$  l'integrale sia esponenzialmente piccolo e che i contributi siano non trascurabili solo per  $0 \leq t \leq 1/x$  e quindi che sia

$$\int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt \approx f(0) \int_0^{1/x} dt = \frac{f(0)}{x} \quad \text{per } x \rightarrow \infty \quad (7.39)$$

Questo risultato è un caso particolare del

**Lemma di Watson** Se la funzione reale o complessa  $f(t)$  ha l'espansione asintotica

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\alpha_n} \quad t \rightarrow 0^+ \quad (7.40)$$

con

$$-1 < \operatorname{Re}(\alpha_0) < \operatorname{Re}(\alpha_1) \dots \quad (7.41)$$

Se l'integrale

$$I(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \quad (7.42)$$

è assolutamente convergente per  $\operatorname{Re} z > \sigma > 0$ , allora  $I(z)$  è analitica per  $\operatorname{Re} z > \sigma$  e,  $\forall \delta > 0$

$$I(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(\alpha_n + 1)}{z^{\alpha_n + 1}} \quad z \rightarrow \infty, \quad |\operatorname{Arg} z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta \quad (7.43)$$

Dimostrazione. [10] Il lemma vale anche se l'estremo superiore dell'integrale non è infinito ma un numero qualsiasi  $M > 0$ .

**Metodo di Laplace** Consideriamo l'integrale

$$I(x) = \int_a^b e^{xf(t)} g(t) dt \quad (7.44)$$

Se la funzione  $f(t)$  ha un massimo in  $t_0 \in [a, b]$ , per grandi valori di  $x$  questo massimo è sempre più pronunciato e quindi ci aspettiamo che il contributo dominante all'integrale venga dall' intorno del massimo, ovvero

$$\begin{aligned} I(x) &\approx g(t_0) e^{xf(t_0)} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} e^{\frac{1}{2}xf''(t_0)(t-t_0)^2} dt \\ &\approx g(t_0) e^{xf(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}xf''(t_0)(t-t_0)^2} dt \\ &= \sqrt{\frac{-2\pi}{xf''(t_0)}} g(t_0) e^{xf(t_0)} \quad x \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (7.45)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il risultato

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad (7.46)$$

Il risultato (7.45) è garantito dal seguente teorema.

**Teorema** Siano  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . La funzione  $f(t)$  abbia un massimo in  $t_0 \in [a, b]$  e sia  $\sup f(t) < f(t_0)$  in ogni intervallo chiuso non contenente  $t_0$ ; sia inoltre  $f \in C^2$  in un intorno di  $t_0$  (quindi  $f'(t_0) = 0$  e  $f''(t_0) < 0$ ). La funzione  $g$  sia continua in un intorno di  $t_0$ . L'integrale  $I(z)$  sia assolutamente convergente per  $\operatorname{Re} z > \sigma > 0$ . Allora

$$I(z) = \int_a^b e^{zf(t)} g(t) dt \sim \sqrt{\frac{-2\pi}{zf''(t_0)}} g(t_0) e^{zf(t_0)} \quad z \rightarrow \infty, \quad |\operatorname{Arg} z| < \pi/2 \quad (7.47)$$

Dimostrazione. Dalle ipotesi su  $f$  e  $g$  segue

$$f(t) \sim f(t_0) + \frac{1}{2} f''(t_0)(t - t_0)^2 \quad t \rightarrow t_0 \quad (7.48)$$

$$g(t) \sim g(t_0) \quad t \rightarrow t_0 \quad (7.49)$$

Esiste un  $\delta > 0$  tale che  $f''(t) < 0$  per  $t \in (t_0, t_0 + \delta]$ . Poniamo

$$\tau = f(t_0) - f(t) > 0 \quad t \in (t_0, t_0 + \delta] \quad (7.50)$$

E' allora

$$\tau \sim -\frac{1}{2} f''(t_0)(t - t_0)^2 \quad t \rightarrow t_0^+ \quad (7.51)$$

e quindi

$$t - t_0 \sim \sqrt{\frac{-2\tau}{f''(t_0)}} \quad t \rightarrow t_0^+ \quad (7.52)$$

e

$$\frac{dt}{d\tau} \sim \sqrt{\frac{-1}{2\tau f''(t_0)}} \quad \tau \rightarrow 0^+ \quad (7.53)$$

Consideriamo

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+\delta} e^{zf(t)} g(t) dt &= e^{zf(t_0)} \int_0^{f(t_0)-f(t_0+\delta)} e^{-z\tau} g(t(\tau)) \frac{dt}{d\tau} d\tau \\ &\sim e^{zf(t_0)} \int_0^{f(t_0)-f(t_0+\delta)} e^{-z\tau} g(t_0 + \sqrt{\frac{-2\tau}{f''(t_0)}}) \frac{1}{\sqrt{-2\tau f''(t_0)}} d\tau \\ &= e^{zf(t_0)} \frac{1}{\sqrt{-2f''(t_0)}} \int_0^{f(t_0)-f(t_0+\delta)} e^{-z\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau}} g(t_0 + \sqrt{\frac{-2\tau}{f''(t_0)}}) d\tau \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi valutare un integrale del tipo

$$\int_0^{f(t_0)-f(t_0+\delta)} e^{-z\tau} h(\tau) d\tau \quad (7.54)$$

con

$$h(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} g(t_0 + \sqrt{\frac{-2\tau}{f''(t_0)}}) \quad (7.55)$$

Ma

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} g(t_0 + \sqrt{\frac{-2\tau}{f''(t_0)}}) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} (g(t_0) + g'(t_0) \sqrt{\frac{-2\tau}{f''(t_0)}} + \dots) \quad (7.56)$$

Possiamo allora utilizzare il lemma di Watson con

$$a_0 = g(t_0) \quad \alpha_0 = -\frac{1}{2} \quad (7.57)$$

Ricordando che  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  otteniamo

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta} e^{zf(t)} g(t) dt \sim e^{zf(t_0)} g(t_0) \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{-2f''(t_0)}} \quad (7.58)$$

L'intervallo  $[t_0 - \delta, t_0]$  da lo stesso contributo all'integrale e quindi

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} e^{zf(t)} g(t) dt \sim e^{zf(t_0)} g(t_0) \sqrt{\frac{-2\pi}{zf''(t_0)}} \quad (7.59)$$

Si può dimostrare infine che gli intervalli  $[a, t_0 - \delta]$  e  $(x_0 + \delta, b]$  danno un contributo che è esponenzialmente soppresso, rispetto a quello dato dalla (7.59), quando  $z \rightarrow \infty$ .

**Sviluppo asintotico per la Gamma di Eulero** Consideriamo la funzione Gamma di Eulero

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (7.60)$$

E' anche

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \Gamma(z+1) = \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-t+z \ln t} dt \quad (7.61)$$

Vogliamo ottenere uno sviluppo asintotico per  $\Gamma(x)$  per  $x$  reale e positivo per  $x \rightarrow +\infty$ .

Quindi conviene riscalare la variabile  $t \rightarrow xs$ , ottenendo

$$\Gamma(x) = x^x \int_0^\infty e^{(-s+\ln s)x} ds \quad (7.62)$$

Quindi è

$$f(s) = -s + \ln s \quad (7.63)$$

Questa funzione ha un massimo in  $s = 1$  con  $f''(1) = -1$ . Inoltre  $f(1) = -1$ . Quindi per  $x \rightarrow +\infty$  utilizzando la (7.47) otteniamo la formula di Stirling

$$\Gamma(x) \sim x^x e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \quad (7.64)$$

Se  $x = n + 1$  otteniamo

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) = n! &\sim \sqrt{2\pi}(n+1)^{n+\frac{1}{2}}e^{-n-1} \\ &\sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad n \rightarrow +\infty\end{aligned}$$

Ringrazio G. Martucci per alcune dimostrazioni di teoremi della variabile complessa tratte dai suoi appunti.

## Riferimenti bibliografici

- [1] L. V. Ahlfors, Complex Analysis, Mc Graw-Hill Book Company, New York, N.Y., 1966.
- [2] S. Lang, Complex Analysis, Haddison-Wesley, 1977.
- [3] A. I. Markushevich, Theory of Functions of a Complex Variable, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [4] W. Rudin, Analisi Complessa e Reale, Bollati Boringhieri, Torino, 1974.
- [5] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw Hill, N.Y. 1991
- [6] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, II Fourier Analysis, Self Adjointness, Academic Press, New York 1972
- [7] A.N. Kolmogorov e S.V.Fomin, Elementi di teoria delle Funzioni e di Analisi Funzionale, MIR, Mosca 1980
- [8] S. Lang, Real Analysis, Addison-Wesley, London 1983
- [9] J. Arsac, Fourier Transforms and the Theory of Distributions, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966
- [10] C. Bernardini, O. Ragnisco e P. M. Santini, Metodi Matematici della Fisica, La Nuova Italia Scientifica, Roma 1993
- [11] B. Davies, Integral Trasforms and Their Applications, Springer-Verlag, New York, 1978