

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Marcello Ciafaloni

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI CAMPI

Dispense del corso di
COMPLEMENTI DI FISICA TEORICA
a cura di
L.Fedeli, J.Giacomelli, L.Lolli

Anno Accademico 2005/2006

Indice

| | |
|---|-----------|
| 1 Campi di spostamento: onde elastiche e fononi | 1 |
| 1.1 Sistemi a molti gradi di libertà: fononi, fotoni, particelle e teoria dei campi | 1 |
| 1.2 Catena lineare e onde unidimensionali | 3 |
| 1.3 Onde in tre dimensioni. Principio di azione | 5 |
| 1.4 Sviluppo in modi propri. Quantizzazione dei fononi | 7 |
| 1.5 Lo spazio di Fock e la meccanica quantistica. Energia di zero | 10 |
| 1.6 Esercizi e complementi | 12 |
| 1.6.1 Ortogonalità e completezza | 12 |
| 1.6.2 Densità degli stati | 13 |
| 1.6.3 Moto classico di due o tre atomi accoppiati | 14 |
| 1.6.4 Velocità del suono nell'aria | 14 |
| 1.6.5 Onde unidimensionali senza dispersione | 14 |
| 2 Campo Elettromagnetico. Fotoni | 15 |
| 2.1 Equazioni di Maxwell. Gauge di Lorentz e di Coulomb | 15 |
| 2.2 Irraggiamento classico. Funzioni di Green | 17 |
| 2.3 Campi e Spettro di Emissione di Dipolo | 19 |
| 2.4 Lagrangiana e Hamiltoniana del Campo in Gauge di Coulomb | 20 |
| 2.5 Sviluppo in Modi Propri. Fotoni | 22 |
| 2.6 Effetto Casimir | 24 |
| 2.7 Esercizi e Complementi | 25 |
| 3 Emissione, assorbimento e diffusione di fotoni | 28 |
| 3.1 Interazione radiazione–materia. Processi elementari | 28 |
| 3.2 Rappresentazione di interazione. Regola d'oro di Fermi | 31 |
| 3.3 La serie perturbativa della matrice di transizione | 32 |
| 3.4 Transizioni di emissione e assorbimento. Approssimazione di dipolo | 35 |
| 3.5 Lo spettro di emissione spontanea. Vita media | 37 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.6 | Emissione di multipolo. Effetto Cerenkov | 39 |
| 3.7 | Diffusione della luce: scattering Thomson | 42 |
| 3.8 | Scattering Raman | 44 |
| 4 | Condensazione di bosoni e superfluidit | 46 |
| 4.1 | Campo bosonico di Schroedinger | 47 |
| 4.2 | Modello di Landau del condensato con interazioni | 49 |
| 4.3 | Superfluidit e rottura di simmetria | 52 |
| 5 | Equazione di Dirac | 54 |
| 5.1 | Soluzioni dell'equazione libera | 56 |
| 5.2 | Soluzioni in campo esterno. Limite non-relativistico | 57 |
| 5.3 | Covarianza Relativistica | 61 |
| 5.4 | Il campo di Dirac. Sviluppo in modi propri | 63 |
| 5.5 | Quantizzazione di Fermi. Spin e statistica, antiparticelle | 64 |
| 5.6 | Equazione e campo di Weil | 67 |
| 5.7 | Argomentazione di Bethe per il Lamb Shift | 68 |

Capitolo 1

Campi di spostamento: onde elastiche e fononi

1.1 Sistemi a molti gradi di libertà: fononi, fotoni, particelle e teoria dei campi

La meccanica quantistica si occupa ordinariamente di sistemi con numero finito e fisso di gradi di libertà. Atomi e molecole sono esempi tipici di tali sistemi, e sono anche i più importanti in quanto spiegano la stabilità e le proprietà statiche dei corpi. Tuttavia, se gli scambi di energia sono sufficientemente grandi, il numero degli atomi eccitati e interagenti può essere dell'ordine del numero di Avogadro e si formano allora eccitazioni collettive, quali onde elastiche e sonore le quali possono anch'esse mostrare effetti quantistici, dovuti allo scambio di fononi, a basse temperature.

Sappiamo inoltre che le onde elettromagnetiche classiche sono caratterizzate da campi definiti in ogni punto dello spazio, anche in assenza di supporto materiale. Esse corrispondono quindi a *infiniti gradi di libertà* (g.d.l.), e mostrano – in opportune situazioni sperimentali – effetti quantistici anche a temperatura ambiente (scambio di fotoni). Infine, anche le particelle elementari, quali elettrone, protone etc. hanno la proprietà di mescolarsi – ad energie sufficientemente grandi rispetto alla loro massa – con un numero arbitrario di coppie particella–antiparticella, e corrispondono quindi, anch'esse, a infiniti gradi di libertà quantistici.

In tutti questi casi, pur cambiando l'o.d.g. dell'energia di eccitazione, si manifestano fenomeni di nuovo tipo, caratterizzati dalla eccitazione di un numero grandissimo di g.d.l. Si tratta allora di generalizzare la meccanica quantistica non relativistica in modo da poter trattare le eccitazioni collettive di molti o infiniti gradi di libertà. Dato che la singola eccitazione collettiva si può far corrispondere a un campo definito sui punti del sistema, il metodo di quantizzazione

corrispondente si chiama *Teoria quantistica dei campi*.

È da notare che il metodo di quantizzazione dei campi è stato sviluppato a partire da campi “piccoli” i quali descrivono oscillazioni del sistema attorno a uno stato di equilibrio classico: le eccitazioni collettive sono i modi “propri” di oscillazione e la hamiltoniana è l’energia di eccitazione di tali modi i quali sono, in prima approssimazione, *armonici*. Questi modi armonici sono i “quanti” del sistema (fononi, fotoni, particelle, a seconda dei casi) e le correzioni anarmoniche, presenti per ampiezze più grandi, rappresentano le interazioni di tali quanti, cui si applica la teoria delle perturbazioni.

Consideriamo ad esempio un campo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ che rappresenta, al tempo t , lo spostamento del punto \mathbf{x} di un corpo materiale dalla sua posizione di equilibrio, corrispondente allo stato termodinamico di partenza del corpo (dato volume V , temperatura, etc¹...). La lagrangiana classica del sistema, data inizialmente in funzione delle \mathbf{x} e delle \mathbf{p} , può essere espressa in funzione delle \mathbf{u}_i , e determinerà le loro equazioni di moto classiche. La procedura di quantizzazione consiste allora in tre passi:

◇1◇ *Identificazione dei modi propri delle piccole oscillazioni in base alla lagrangiana e all’energia di eccitazione (hamiltoniana) classica del sistema. Tali modi sono caratterizzati dalla relazione di “dispersione” fra frequenza ω e numero d’onda \mathbf{k} e da opportune variabili di ampiezza.*

◇2◇ *Quantizzazione delle ampiezze dei modi in base alle regole di commutazione canonica del sistema di partenza (per i campi di spostamento) oppure in analogia con esse (per le particelle).*

◇3◇ *Espressione della hamiltoniana in funzione delle ampiezze dei modi e conseguente soluzione dell’equazione di Schroedinger di evoluzione quantistica.*

Il metodo così descritto si applica indifferentemente a fononi di velocità v , con la regola di dispersione $\omega = v|\mathbf{k}|$, ai fotoni per cui $\omega = c|\mathbf{k}|$, e a qualsiasi particella di massa m , per la quale la relazione tra energia e impulso $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ($c = 1$) determina la regola di dispersione usando le relazioni di DeBroglie $E = \hbar\omega$, $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Esiste però una differenza concettuale tra i modi propri della materia (fononi acustici e ottici, plasmoni, etc...) e particelle. I primi sono gradi di libertà efficaci, che dipendono dalle caratteristiche del corpo, per cui nè parametri di dispersione nè interazioni sono universali. Le seconde, invece, sembrano portare, secondo la visione attuale, sia le diverse cariche (elettriche e non) dei costituenti elementari della

¹Dato che si tratta di un numero finito N di atomi, è in realtà più appropriato parlare degli spostamenti $\mathbf{u}_i(t)$ delle varie celle atomiche, numerate ad esempio con il modello di reticolo cristallino cubico.

materia, sia quelle dei mediatori delle interazioni fondamentali. Inoltre, sia l'Elettrodinamica quantistica (teoria dei fotoni e degli elettroni) sia le sue generalizzazioni (la Teoria unificata elettrodebole e la Cromodinamica quantistica delle interazioni nucleari) sono costruite in base al principio universale di “invarianza di gauge” che determina completamente il tipo di interazioni possibili, dato il tipo di cariche delle particelle portatrici. Quindi, le teorie di campo delle particelle sembrano possedere un notevole grado di universalità, e si candidano come teorie delle interazioni di base.

Il cosiddetto “*modello standard*” delle interazioni fondamentali è stato molto ben verificato sperimentalmente negli ultimi anni ed ha segnato dunque un notevole successo di queste teorie di campo di gauge. Restano però da capire la Gravità quantistica (che per la sua natura geometrica non rientra pienamente in questo schema) insieme a diversi segnali cosmologici di una nuova fisica alla scala di Planck (distanza a cui la gravità diventa forte). La teoria ultima forse non è, alla fine, una semplice teoria di campo.

1.2 Catena lineare e onde unidimensionali

Come primo esempio di vibrazioni armoniche, consideriamo un sistema unidimensionale, schematizzato come catena lineare di atomi accoppiati. Casi di questo tipo possono essere le onde sonore in un tubo (vibrazioni longitudinali), o le corde vibranti (vibrazioni trasverse). Nel caso longitudinale si può pensare ad atomi di ugual massa m , caratterizzati all'equilibrio da un passo reticolare a , e accoppiati tra loro da molle uguali, di costante elastica C .

La lagrangiana del sistema è data da:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m \dot{u}_i^2 - \frac{1}{2} C \sum_{i=1}^N (u_i - u_{i+1})^2 \quad (1.1)$$

dove le $u_i = x'_i - x_i$ rappresentano gli spostamenti rispetto all'equilibrio delle posizioni x_i degli atomi. Per semplicità di trattazione, ci riferiremo al caso di condizioni periodiche al bordo, per cui $N+1 \equiv 1$, tenendo presente che diverse condizioni di bordo (estremi fissi, o liberi, etc..) non modificheranno le proprietà di volume del sistema, cui siamo principalmente interessati. La (1.1) è un esempio molto particolare di lagrangiana quadratica nelle u_i e \dot{u}_i , derivante da piccoli spostamenti attorno allo stato fondamentale del materiale. I termini anarmonici di ordine superiore, dal cubico in poi – che sono qui trascurati – potranno poi essere affrontati quali interazioni tra i modi propri del sistema.

Il primo passo è dunque identificare i modi propri che diagonalizzano la lagrangiana e l'evoluzione temporale. Le equazioni del moto di Eulero-Lagrange hanno la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} = m \ddot{u}_i = -C (u_i - u_{i-1} + u_i - u_{i+1}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \quad (1.2)$$

Queste equazioni, alle differenze finite, sono diagonalizzate da una trasformata di Fourier discreta:

$$u_j^{(\chi)} = A e^{i \cdot \chi \cdot j} e^{-i \cdot \omega_\chi \cdot t} + c.c. \quad (1.3)$$

purché ω_χ soddisfi l'equazione

$$\omega_\chi^2 = 2 \frac{C}{m} (1 - \cos \chi) = 4 \frac{C}{m} \sin^2 \frac{\chi}{2} \quad (1.4)$$

e purché sia soddisfatta la condizione di bordo $u_{N+1} \equiv u_1$ cioè

$$e^{i \cdot \chi \cdot N} = 1, \quad \chi = n \frac{2\pi}{N} \quad (|n| \leq N/2) \quad (1.5)$$

dove n è un intero compreso fra $-N/2$ e $N/2$ (incluso $n = N/2$ per N pari e con $|n| \leq \frac{N-1}{2}$ per N dispari). Si hanno dunque N modi propri, caratterizzati dalla regola di dispersione (1.4), con valori di χ sia positivi che negativi nella prima zona di Brillouin (1.5). È da notare che, dati i valori interi assunti da j , χ è definito *modulo* 2π e quindi n è definito *modulo* N .

Il significato fisico dei modi propri quali onde elastiche è più chiaro nel limite continuo, in cui $N \rightarrow \infty$ e $a \rightarrow 0$ con $L = Na$ fisso. Allora $x = a j$ e $k = \frac{\chi}{a}$ diventano rispettivamente la coordinata atomica e il numero d'onda, mentre i parametri m e C devono essere riscritti in termini delle variabili del continuo di densità di massa μ e coefficiente di compressibilità K come segue

$$\mu = \frac{m}{a}, \quad K = Ca \quad (1.6)$$

dove C rappresenta la costante di richiamo delle molle e K il coefficiente di compressibilità. Si vede allora che la lagrangiana \mathcal{L} si può riscrivere come integrale di Riemann di opportuna densità:

$$\mathcal{L} = \int_0^L dx \mathfrak{L} = \frac{1}{2} \int_0^l dx \left(\mu \dot{u}^2(x, t) - K (u'(x, t))^2 \right) \quad (1.7)$$

dove $u(a j, t) = u_j(t)$ e $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\dot{u}, \partial_x u, t)$ sono campo di spostamento e densità lagrangiana. La novità è che l'interazione di primo vicino delle u_i qui implica la dipendenza di \mathfrak{L} dalla derivata prima $\partial_x u$ oltre che da \dot{u} . Analogamente, le equazioni di moto diventano nel continuo

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad (1.8)$$

cioè corrispondono all'equazione delle onde di d'Alembert in una dimensione, con parametro di velocità $v = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$. Questo è confermato dal limite continuo della regola di dispersione

$$\omega_k^2 = 4 \frac{K}{\mu a^2} \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right) \quad \overline{a \rightarrow 0} \quad v^2 k^2 \quad (1.9)$$

corrispondente ad onde elastiche di velocità v .

1.3 Onde in tre dimensioni. Principio di azione

Il modello unidimensionale sopra considerato ha lo spostamento nella stessa direzione di propagazione dell'onda, ed è quindi di tipo longitudinale. Tali sono le onde di pressione, tipiche dei fluidi, le quali, in tre dimensioni spaziali, sono caratterizzate da campi di spostamento del tipo $\mathbf{u}_L = \nabla\varphi$, dove φ è uno scalare. Invece le onde trasversali sono del tipo $\mathbf{u}_T = \nabla \times \mathbf{a}$, cioè si rappresentano come rotazioni di un potenziale vettore. In generale si può supporre $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$. Le onde elastiche di un materiale qualsiasi sono sovrapposizioni di onde trasversali e longitudinali di velocità v_T e v_L diverse tra loro ed hanno quindi, per ogni direzione di propagazione, tre gradi di libertà, due trasversi e uno longitudinale.

Non è il nostro scopo quello di trattare in generale le onde elastiche. Vogliamo però notare come il metodo lagrangiano si possa estendere ai mezzi continui in modo da capire abbastanza facilmente la decomposizione detta sopra. Il modello unidimensionale suggerisce di scrivere la lagrangiana come integrale di una densità. L'azione corrispondente sarà allora del tipo

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \mathcal{L}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \partial_{x_i} u_j(\mathbf{x}, t)) \quad (1.10)$$

Il principio di azione generalizzato impone che \mathcal{A} sia stazionario per qualsiasi perturbazione $\delta u_i(\mathbf{x}, t)$ che si azzeri al bordo del sistema e agli istanti iniziale e finale. La variazione di \mathcal{A} si scrive integrando per parti le variazioni delle derivate, cioè

$$\delta\mathcal{A} = \int_{\Omega} d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \delta \dot{u}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial (\partial_{x_j} u_i)} \delta \partial_{x_j} u_i \right) = \quad (1.11)$$

$$= \int_{\Omega} d^4x \left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial (\partial_{x_j} u_i)} \right) \delta u_i + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \delta u_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial (\partial_{x_j} u_i)} \delta u_i \right) \right] \quad (1.12)$$

e si nota che i termini di divergenza possono essere calcolati al bordo, oppure all'inizio e alla fine, dove si annullano perché $\delta u_i|_{\partial\Omega} = 0$. Data l'arbitrarietà di δu_i all'interno di Ω , possiamo scrivere le equazioni del moto di Eulero-Lagrange per la densità di lagrangiana:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial (\partial_{x_j} u_i)} \quad (1.13)$$

queste differiscono da quelle note per un numero finito di *g.d.l.* per la presenza dell'ultimo termine, con le derivate rispetto alle coordinate spaziali.

Il metodo lagrangiano è particolarmente adatto a descrivere le onde elastiche in un mezzo omogeneo e isotropo, perchè in tal caso la densità di lagrangiana deve essere invariante per rotazioni. È allora abbastanza facile convincersi che la più generale espressione, quadratica nelle \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$ e nelle $\partial_{x_j} u_i$ è, a meno di divergenze totali, della forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \left(\dot{\mathbf{u}}^2 - v_L^2 (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{u})^2 - v_T^2 (\vec{\nabla} \times \mathbf{u})^2 - \omega_0^2 \mathbf{u}^2 \right) \quad (1.14)$$

dove ρ denota la densità di massa in tre dimensioni. Le onde di tipo sonoro si ottengono per $\omega_0 = 0$ e sono normalmente di tipo longitudinale. Se invece $\omega_0 \neq 0$, vuol dire che esiste una forza di richiamo anche quando \mathbf{u} è costante rispetto a \mathbf{x} , e questo è tipico delle onde di torsione (trasverse), oppure delle onde di plasma (longitudinali), le quali separano le cariche negative (elettroni) dagli ioni corrispondenti.

Ad esempio, per $\omega_0 = v_T = 0$, le equazioni del moto (1.13), derivate da (1.14), si scrivono

$$\ddot{\mathbf{u}} - v_L^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (1.15)$$

le quali si risolvono più semplicemente ponendo $\mathbf{u} = \vec{\nabla} \varphi$, ove il potenziale scalare φ soddisfa l'equazione di d'Alembert:

$$\ddot{\varphi} - v_L \Delta \varphi = 0 \quad (1.16)$$

se invece $v_T = 0$, ma $\omega_0 \neq 0$, le onde sono sempre longitudinali, ma l'equazione diventa:

$$\ddot{\varphi} - v_L \Delta \varphi + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (1.17)$$

che contiene una frequenza di richiamo anche per il campo $\varphi = \text{cost.}$

Anche i modi propri sono facilmente generalizzabili quali onde piane in tre dimensioni. Nel caso delle onde longitudinali, si ottiene

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \sim a_L \hat{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + c.c. \quad (1.18)$$

con $\omega_{\mathbf{k}} = v_L |\mathbf{k}|$ nel caso sonoro, e

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{v_L^2 \mathbf{k}^2 + \omega_0^2} \quad (1.19)$$

nel caso di onde di plasma. È da notare che la forma $\mathbf{u} = \vec{\nabla} \cdot \varphi$ del caso longitudinale si traduce nella (1.18) con i modi propri in direzione $\hat{\mathbf{k}}$. Se invece $v_L = 0$, ma $v_T \neq 0$ è facile vedere che la rappresentazione $\mathbf{u} = \vec{\nabla} \times \mathbf{a}$ ($\vec{\nabla} \cdot \mathbf{a} = 0$) porta a modi propri

$$\mathbf{u}^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) \sim a_T \varepsilon^{(\alpha)}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + c.c. \quad (1.20)$$

ove $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$ sono due versori, ortogonali a \mathbf{k} e fra loro, che rappresentano le due possibili polarizzazioni trasverse del mezzo (isotropo). Infine, se sia v_L che v_T sono non nulli, \mathbf{u} è dato in generale da una sovrapposizione di onde di tipo (1.18) e di tipo (1.20), secondo la decomposizione di $\mathbf{u} = \vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla} \times \mathbf{a}$.

È bene notare, per essere precisi, che la lagrangiana (1.14) differisce (come si può mostrare) per una divergenza totale dalla formulazione più convenzionale

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} \left(\rho \dot{\mathbf{u}}^2 - \lambda \left(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{u} \right)^2 - 2\mu (e_{ij} e_{ij}) - \rho \omega_0^2 \mathbf{u}^2 \right) \quad (1.21)$$

in cui interviene direttamente il tensore simmetrico delle deformazioni $e_{ij} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2$ e λ e μ sono i moduli di Young, in termini dei quali le velocità di propagazione sono date da $v_T^2 = \mu/\rho$, $v_L^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$. Le equazioni del moto sono dunque equivalenti, ma la (1.14) è conveniente per la separazione di onde trasverse e longitudinali, mentre la (1.21) conviene per le considerazioni energetiche.

1.4 Sviluppo in modi propri. Quantizzazione dei fononi

Partiamo di nuovo dal campo unidimensionale di una catena lineare di atomi con N gradi di libertà. Lo spostamento più generale $u(x, t)$ sarà una sovrapposizione dei modi propri (1.3) della forma (cf. sez. 1.6)

$$u_j(t) = \sum_{k=k_{min}}^{k_{max}} \frac{1}{\sqrt{2\mu\omega_k L}} (a_k e^{i(kx_j - \omega_k t)} + c.c.) \quad (1.22)$$

ove $x_j = \frac{L}{N}j$, ($j = 1, \dots, N$) e $k = n\frac{2\pi}{L}$, ($n \leq \frac{N}{2}$) sono rispettivamente le coordinate atomiche e i numeri d'onda dei modi propri, mentre ω_k è dato dalla regola di dispersione

$$\omega_k^2 = 4\frac{v^2}{a^2} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right), \quad v^2 = \frac{C}{\mu} \quad (1.23)$$

È da notare che l'eq. (1.22) è automaticamente reale e sovrappone frequenze positive (negative) con a_k (a_k^*), mentre k corre sulla prima zona di Brillouin, che è simmetrica per $k \rightarrow -k$, con $k_{max} = -k_{min} = N\frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{a}$. La normalizzazione $\sim a/\sqrt{2\omega\mu}$ è particolarmente adatta per l'equazione dell'energia, come vedremo.

Gli N numeri complessi a_k corrispondono a $2N$ numeri reali, tanti quanti le coordinate $q_j = u_j(0)$ e i momenti coniugati $p_j = m\dot{u}_j(0)$ del sistema originario e possono essere considerate come variabili dinamiche del sistema di modi propri. Mostriamo che le a_k sono in corrispondenza biunivoca con le \mathbf{q} e le \mathbf{p} . Infatti, dalle (1.22) segue

$$\begin{aligned} q_j(0) = u_j(0) &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{2m\omega_k N}} e^{-ikx_j} (a_k + a_{-k}^*) \\ p_j(0) = m\dot{u}_j(0) &= \sum_k \frac{1}{i} \sqrt{\frac{m\omega_k}{2N}} e^{-ikx_j} (a_k - a_{-k}^*) \end{aligned} \quad (1.24)$$

e quindi le quantità $a_k \pm a_{-k}^*$ possono essere ottenute per trasformata di Fourier discreta inversa da $q_j(0)$ e $p_j(0)$, cioè dalle condizioni iniziali del sistema. Si ottiene

$$a_k = \sum_j \frac{e^{-ikx_j}}{\sqrt{N}} \left(\sqrt{\frac{m\omega_k}{2}} q_j(0) + \frac{i}{\sqrt{2m\omega_k}} p_j(0) \right) \quad (1.25)$$

ove si nota la somiglianza con la definizione dell'operatore a dell'oscillatore armonico quantistico.

Siamo ora in grado di esprimere l'energia del sistema in termini delle a_k e a_k^* . Usando una notazione vettoriale a N componenti possiamo scrivere

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \frac{1}{2} (\mathbf{u}, V\mathbf{u}) \quad (1.26)$$

e, usando le (1.24) nella forma $\mathbf{q} = \sum_k \mathbf{u}^{(k)} \frac{1}{\sqrt{2m\omega_k N}} (a_k + a_{-k}^*)$, $\mathbf{p} = \sum_k \frac{\mathbf{u}_i^{(k)}}{i} \sqrt{\frac{m\omega_k}{2N}} (a_k - a_{-k}^*)$ e la ortonormalità delle $\mathbf{u}^{(k)}$ (Sez. 1.6), otteniamo

$$H = \sum_k \frac{\omega_k}{4} (|a_k - a_{-k}^*|^2 + |a_k + a_{-k}^*|^2) = \sum_k \omega_k a_k^* a_k \quad (1.27)$$

Quindi l'energia (di eccitazione) si esprime come somma di ampiezze di oscillatori di frequenze ω_k , su tutti i modi k .

Un cenno particolare merita il caso in cui esista un modo $\omega_0 = 0$, come nel caso dei fononi con condizioni periodiche al bordo. Esso corrisponde al baricentro del sistema $Q_0 = \sum_n q_n / N$ che, nel caso di modo zero evolve nel tempo con velocità costante, di modo che l'impulso totale $P_0 = \sum_n p_n$ è conservato. In tal caso le (1.22) e (1.25) vanno modificate nel termine $k = 0$, e il contributo all'energia del modo zero è semplicemente $P_0^2 / (2mN)$.

Avendo ora ottenuto la corrispondenza (1.25) fra ampiezze dei modi e coordinate canoniche, siamo in grado di quantizzare il sistema utilizzando le regole di commutazione canonica delle variabili \mathbf{q} e \mathbf{p} originarie:

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (1.28)$$

Sostituendo le (1.28) nelle (1.25) e nel suo coniugato otteniamo

$$[a_k, a_{k'}^+] = \hbar\delta_{k,k'} \quad (1.29)$$

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^+, a_{k'}^+] = 0 \quad (1.30)$$

dove si è usato a_k^+ invece che a_k^* per sottolineare il fatto che, al livello quantistico, a_k e a_k^+ sono operatori commutanti tra modi diversi e con commutatore \hbar per lo stesso modo. Quindi $\{a_k, a_k^+\}$ descrivono gli operatori di discesa e salita di N oscillatori indipendenti. Tenuto conto di questo fatto, l'energia totale (1.27) diventa, a livello quantistico

$$H = \sum_k \omega_k (a_k^+ a_k + a_k a_k^+)/2 = \sum_k \hbar\omega_k (N_k + 1/2), \quad N_k = 0, 1, \dots \quad (1.31)$$

avendo indicato con $\hbar N_k$ gli autovalori di $a_k^+ a_k$. Lo stato fondamentale del sistema descritto dalle (1.23), (1.29), (1.31) è il prodotto diretto degli stati fondamentali di ogni modo, e lo

denotiamo con $|0\rangle$, definito da

$$|0\rangle = \prod_k |0\rangle_k, \quad a_k |0\rangle = 0 \quad (1.32)$$

ad esso corrisponde l'energia di “*punto zero*”

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_k \quad (1.33)$$

che si aggiunge all'energia termodinamica dello stato di equilibrio di partenza.

Notiamo ora che energie di eccitazione non banali si ottengono da qualsiasi valore non nullo di qualche N_k , raggiunto tramite l'applicazione degli operatori di salita dallo stato fondamentale. Dato che a ogni $\Delta N_k = 1$ corrisponde un $\Delta E = \hbar\omega_k$, è naturale denominare N_k come il “numero di occupazione dei quanti $\hbar\omega_k$ ” invece che “il numero di eccitazione dell'oscillatore k -esimo”. Corrispondentemente, a_k^+ (a_k) assumono il significato di operatori di creazione (distruzione) di tali quanti. I modi propri assumono perciò il significato di “particelle” – i fononi – caratterizzati da quanti di energia $\hbar\omega_k$ e dalla regola di dispersione (1.23). Siamo quindi arrivati a descrivere lo stato eccitazione del sistema vibrante con un insieme di fononi, il cui numero si conserva in approssimazione armonica, ma che possono essere creati e distrutti nei processi di interazione, agli ordini superiori.

Conviene notare anzitutto che le “particelle” fononi non sono da confondere con il sistema di atomi o particelle che descrivono globalmente il corpo, ma rappresentano invece i modi di vibrazione delle stesse attorno alla posizione di equilibrio, riassunti dalla regola di dispersione. Notiamo anche che la regola di dispersione, inizialmente una relazione tra numero d'onda k e frequenza ω_k fornisce anche una relazione tra energia $\hbar\omega_k$ e impulso, purchè si possa attribuire al fonone l'impulso $\hbar k$. Si può far vedere che in effetti questo succede nel limite continuo e di lunghezza molto grande del sistema, in modo che esso risulti veramente invariante per traslazioni nella regione (finita) di spazio che ci interessa. In tale limite il fonone si può considerare veramente una particella, caratterizzata dalla relazione $E = v|\mathbf{p}|$ tra energia e impulso, simile a quella del fotone ($E = c|\mathbf{p}|$). Tuttavia, per i campioni finiti, l'impulso non si conserva agli estremi. Inoltre, per N finito, bisogna ricordare che $k_n = n\frac{2\pi}{L}$ e che n è definito *modulo* N , per cui $p_n = \hbar k_n$ è definito modulo $\frac{2\pi}{a}\hbar$. La finitezza del campione può causare processi in cui l'impulso dei fononi non è conservato, ma scambiato con il campione nel suo complesso per multipli di $\frac{\hbar}{a}$. Per questa ragione si preferisce parlare del fonone come “quasiparticella”, in confronto con il fotone che si propaga nel vuoto (varietà continua e grande quanto si vuole) per il quale l'impulso è esattamente definito, come per una vera particella.

Le considerazioni fatte per i fononi in una dimensione si estendono senza problemi a tre dimensioni e al caso dei plasmoni. In tali casi l'energia complessiva del sistema assume la

forma

$$E = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \hbar \omega_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} \left(N_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \right), \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.34)$$

ove $\alpha = 1, 2$ si riferisce ai modi trasversi e $\alpha = 3$ a quelli longitudinali. La regola di dispersione ha la forma generale

$$\omega_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} = \sqrt{v_{\alpha}^2 \mathbf{k}^2 + (\omega_{\alpha}^0)^2}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.35)$$

in cui $\omega^0 \neq 0$ si riferisce al caso dei plasmoni, cioè ai quanti delle onde di plasma. Una simile regola di dispersione vale anche per i fononi ottici e la corrispondente relazione tra energia e impulso è

$$E^{(\alpha)}(\mathbf{p}) = \sqrt{v_{\alpha}^2 \mathbf{p}^2 + (\hbar \omega_{\alpha}^0)^2}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.36)$$

Vale la pena notare che questa diventa la relazione fra energia e impulso di una particella relativistica, pur di porre $v = c$ e $\hbar \omega^0 = mc^2$.

1.5 Lo spazio di Fock e la meccanica quantistica. Energia di zero

A partire dal vuoto, definito dalle (1.32), possono essere costruiti stati che corrispondono ad una data configurazione di numeri di occupazione dei modi del sistema, con l'applicazione di operatori di creazione (riscalati di un fattore $\sqrt{\hbar}$), come segue:

$$|N_{\mathbf{k}_1}, \dots, N_{\mathbf{k}_i}, \dots\rangle = \frac{(a_{\mathbf{k}_1}^+)^{N_{\mathbf{k}_1}}}{\sqrt{N_{\mathbf{k}_1}!}} \dots \frac{(a_{\mathbf{k}_i}^+)^{N_{\mathbf{k}_i}}}{\sqrt{N_{\mathbf{k}_i}!}} \dots |0\rangle \quad (1.37)$$

Tali stati sono tra loro ortonormali e, al variare di $N_{\mathbf{k}_i}$, costituiscono la base del prodotto diretto di un insieme numerabile di spazi di Hilbert

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{\mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}_N} \mathcal{H}_{\mathbf{k}_i} \quad (1.38)$$

Lo spazio così costruito delle combinazioni lineari dei vettori di base (1.37) si chiama spazio di Fock del sistema. Nel limite continuo $N \rightarrow \infty$ lo spazio (1.38) è più complicato di un normale spazio di Hilbert.

Lo spazio di Hilbert ordinario della meccanica quantistica dei quanti (fononi o plasmoni) che si considerano è un sottospazio dello spazio di Fock, caratterizzato da un numero di occupazione totale $N = \sum_k N_k$ fissato. Naturalmente tale spazio non ha molto significato fisico per fononi o

plasmoni, mentre lo ha per gli elettroni e i protoni che costituiscono, con la loro massa, i corpi materiali. Si possono costruire stati a una particella, caratterizzati da funzioni d'onda $\psi(\mathbf{k})$

$$|\psi_1\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_1 \psi(\mathbf{k}_1) a^+(\mathbf{k}_1) |0\rangle \quad (1.39)$$

a due particelle

$$|\psi_{1,2}\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_2 \psi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) a^+(\mathbf{k}_1) a^+(\mathbf{k}_2) |0\rangle \quad (1.40)$$

e così via, ove si è soppresso per semplicità l'indice di polarizzazione e si è usato il limite continuo dei \mathbf{k} ($L \rightarrow \infty$, sez. 1.6), ridefinendo gli operatori $a(\mathbf{k}) = a_{\mathbf{k}} (\frac{V}{2\pi})^{3/2}$, i cui commutatori sono di tipo funzione delta. È facile vedere che i prodotti scalari indotti sulle funzioni d'onda dalle regole di commutazione del tipo (1.29) sono quelli normali della rappresentazione degli impulsi nella formulazione di Schrodinger:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_1 \varphi^*(\mathbf{k}_1) \psi(\mathbf{k}_1) \\ \langle \varphi_{1,2}, \psi_{1,2} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_2 \varphi^*(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \psi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \end{aligned}$$

Inoltre, l'evoluzione temporale di questi stati è determinata dall'energia di una o più particelle del tipo considerato. Infatti, dalla (1.39), si ottiene

$$|\psi_1(t)\rangle = e^{-i\frac{(H-E_0)t}{\hbar}} |\psi_1\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_1 \psi(\mathbf{k}_1) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} a^+(\mathbf{k}_1) |0\rangle \quad (1.41)$$

quindi

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_1(t)\rangle = H(\mathbf{p}) |\psi_1(t)\rangle \quad (1.42)$$

dove $H(\mathbf{p})$ è un operatore che ha autovalori $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$ su stati con $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ definito. Analogamente, per due particelle, si ottiene

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_{1,2}(t)\rangle = [H(\mathbf{p}_1) + H(\mathbf{p}_2)] |\psi_{1,2}(t)\rangle \quad (1.43)$$

Si recupera così la formulazione di Schroedinger per una o più particelle libere.

È molto importante notare che gli stati a due particelle (1.40) hanno funzioni d'onda automaticamente simmetriche nello scambio degli indici 1 e 2, semplicemente perchè, secondo le (1.29), $a_{\mathbf{k}_1}^+$ e $a_{\mathbf{k}_2}^+$ commutano tra di loro. Quindi le particelle di tipo fonone o plasmone sono bosoni, cioè seguono la statistica di Bose-Einstein.

Una menzione a parte merita il significato di energia “di punto zero” (1.33) dello stato fondamentale, che è stata sottratta nella evoluzione (1.41). È infatti un po' sorprendente che,

nel limite $N \rightarrow \infty$, tale energia diventi infinita per divergenza sul numero di modi a causa del comportamento di $\omega(\mathbf{k}) \sim |\mathbf{k}|$ per grandi $|\mathbf{k}|$, tanto da far pensare ad una patologia del metodo di quantizzazione. Questa difficoltà viene ordinariamente evitata per sottrazione di E_0 , in quanto essa “rinormalizza” l’energia dello stato di equilibrio di partenza (non esplicitamente considerata) e l’energia è comunque definita a meno di una costante. Va tuttavia osservato che, se si cambia lo stato di equilibrio di partenza (ad es. il volume a bassa temperatura), la sua energia cambia, e tale cambiamento è osservabile, e deve essere attribuito anche ad una variazione finita di E_0 . Quindi, la forma $E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\alpha} \hbar \omega_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}$ ha conseguenze fisiche nel caso che le frequenze proprie $\omega_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}$ subiscano una variazione dovuta a una (piccola) trasformazione dello stato di equilibrio di partenza. Nel caso del campo elettromagnetico tali variazioni danno luogo tra l’altro, all’effetto Casimir, cioè all’esistenza di una forza attrattiva di natura quantistica tra due lastre metalliche scariche nel vuoto. L’osservazione sperimentale di questo effetto è, come vedremo, una conferma della forma (1.33) dell’energia di punto zero.

1.6 Esercizi e complementi

1.6.1 Ortogonalità e completezza

Una base ortonormale dei modi propri (1.3) è data dai vettori

$$u_j^{(n)} = \sqrt{\frac{1}{N}} e^{\frac{i 2 \pi n j}{N}} \quad (1.44)$$

le cui componenti sono potenze delle radici N -esime dell’unità con opportuna normalizzazione. Essi soddisfano le relazioni di ortonormalità

$$\sum_j u_j^{(n)*} u_j^{(m)} = \delta_{n,m} \quad (\text{mod } N) \quad (1.45)$$

e completezza

$$\sum_n u_j^{(n)} u_l^{(n)*} = \delta_{j,l} \quad (\text{mod } N) \quad (1.46)$$

Entrambe queste equazioni derivano poi dalla identità

$$\sum_n e^{\frac{i 2 \pi n j}{N}} = N[\delta_{j,0}, \text{ (mod } N)] \quad (1.47)$$

il cui significato geometrico è molto chiaro: la somma delle radici ennesime dell’unità, o di loro potenze, chiude un poligono regolare, salvo per il caso banale $j = 0$ in cui si ottiene N .

Si noti che lo sviluppo in modi propri (1.22) usa la completezza (1.46) e può essere derivata come segue. Per la completezza e per le equazioni del moto si ha

$$u_j(t) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} u_j^{(n)} (A_n e^{-i\omega_n t} + B_n e^{i\omega_n t}) \quad (1.48)$$

Per la realtà ($u_j = u_j^*$) deve essere $B_n = A_{-n}^*$, e infine cambiando variabile ($n \leftrightarrow -n$ nel secondo termine) e normalizzazione ($A_n = \frac{a_n}{\sqrt{2m\omega_n}}$) si ottiene la (1.22). Analogamente la (1.25) si ottiene dalla ortonormalità (1.45) tenuto conto delle normalizzazioni.

1.6.2 Densità degli stati

Abbiamo già discusso il limite continuo, nella variabile $x = aj$, di un campione finito di lunghezza $L = Na$, quando $N \rightarrow +\infty$ e $a = \frac{L}{N} \rightarrow 0$. In tale limite i modi propri sono descritti dal parametro $k = n \frac{2\pi}{L}$, ove n è un intero che varia da $-\infty$ a $+\infty$, mentre la variabile x assume valori continui tra 0 e L e le somme diventano integrali con la regola

$$a \sum_j \rightarrow \int dx \quad \sum_j \rightarrow \int \frac{dx}{a} \quad (1.49)$$

Vogliamo ora considerare anche il limite di campione infinito $L \rightarrow \infty$, in cui l'insieme dei valori di k diventa denso, cosicché anche il numero d'onda diventa continuo. Questa volta le somme su n diventano integrali con la regola

$$\frac{2\pi}{L} \sum_n \rightarrow \int dk \quad \sum_n \rightarrow \int \frac{Ldk}{2\pi} \quad (1.50)$$

Il fattore di conversione tra somme e integrali va sotto il nome di “densità” degli stati del continuo. In tre dimensioni ci sono tre componenti $k_i = n_i \frac{2\pi}{L_i}$, e quindi

$$\sum_{n_i} \rightarrow \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \quad V = L_1 L_2 L_3 \quad (1.51)$$

Se si osserva infine che $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ secondo le relazioni di De Broglie, si ha anche

$$\sum_{n_i} \rightarrow \int \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} = \int \frac{V d^3 p}{h^3} \quad (1.52)$$

secondo cui ad ogni stato quantico corrisponde una cella di volume h^3 nello spazio delle fasi. L'elemento di volume $d\phi = V d^3 p / h^3$ viene spesso chiamato “spazio delle fasi” della particella considerata.

1.6.3 Moto classico di due o tre atomi accoppiati

Si scrivano esplicitamente le frequenze e i modi propri normalizzati della catena lineare accoppiata con condizioni periodiche al bordo per $N = 2, 3$ e il corrispondente sviluppo (1.22). Si risolva il moto di $u_j(t)$ con le seguenti condizioni iniziali

$$\begin{aligned}\dot{u}_1(0) &= \dot{u}_2(0) = 0, & u_1(0) &= -u_2(0) = u_0, & (N = 2); \\ \dot{u}_1(0) &= \dot{u}_2(0) = \dot{u}_3(0) = u_3(0) = 0, & u_1(0) &= -u_2(0) = u_0, & (N = 3).\end{aligned}$$

Si discuta anche il caso $N = 2$ con $u_1(0) = -u_2(0) = u_0$, e con $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = v_0 \neq 0$ facendo attenzione alle peculiarità del modo zero.

1.6.4 Velocità del suono nell'aria

Consideriamo l'aria un gas biatomico perfetto con peso molecolare $M = 30g$, e le vibrazioni sonore in regime adiabatico ($K = V \frac{\partial p}{\partial V} |_S$). Si derivi l'espressione della velocità del suono ed il suo ordine di grandezza per $T = 300K$. ($R = 8.31 \frac{J}{K}$)

1.6.5 Onde unidimensionali senza dispersione

Nel caso di un sistema molto lungo $L \rightarrow +\infty$ con regola di dispersione $\omega = v|k|$ la velocità di dispersione non dipende dalla frequenza (equazione di d'Alembert) e la soluzione generale ha la forma

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (1.53)$$

Come si può derivare questa equazione dallo sviluppo in modi propri? Si risolva il moto con le condizioni iniziali $\dot{u}(x, 0) = 0$, $u(x, 0) = u_0 e^{-|x|}$.

Capitolo 2

Campo Elettromagnetico. Fotonî

2.1 Equazioni di Maxwell. Gauge di Lorentz e di Coulomb

Ricordiamo che il campo elettromagnetico (e.m.) è caratterizzato dai campi \mathbf{E} e \mathbf{B} , propagantisi nel vuoto a velocità c , costante universale indipendente dal sistema di riferimento. Non c'è, dunque un supporto materiale delle oscillazioni elettromagnetiche – in altre parole, l'etere non esiste – e la loro quantizzazione si basa direttamente sulla descrizione dei modi propri del campo quale insieme di oscillatori. Per capire meglio il conteggio dei gradi di libertà, richiamiamo prima la descrizione del campo in termini di potenziali e.m., e il meccanismo della radiazione delle onde.

Scriviamo le equazioni di Maxwell nel sistema di unità di Gauss razionalizzato, o di Heaviside. In questo sistema, l'unità di carica è resa dipendente da quelle meccaniche [CGS] ponendo la costante universale $\epsilon_0 = 1$, in modo da ottenere espressioni particolarmente semplici della densità di energia e del vettore di Poynting. Inoltre \mathbf{E} e \mathbf{B} sono misurati nelle stesse unità di misura fattorizzando $\frac{1}{c}$ nella espressione della forza di Lorentz: $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B}$. Si scrive dunque

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad ; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = 0 \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho \quad ; \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} (\mathbf{J} + \dot{\mathbf{E}}) \tag{2.2}$$

In queste unità, il potenziale coulombiano risulta $\sim \frac{q_1 q_2}{4\pi r}$, da cui si deriva, ad esempio che

$1Coulomb = 3 \cdot 10^9 [q]_{Gauss} = \sqrt{4\pi} \cdot 3 \cdot 10^9 [q]_{G.R.}$, e che la costante di struttura fina ha la forma $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137}$.

Le prime due equazioni di Maxwell (indipendenti dalle sorgenti) sono risolte ponendo

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}, \quad (2.3)$$

ove A^0 e \mathbf{A} sono i potenziali scalare e vettore. Ma bisogna notare che questi potenziali non sono determinati univocamente dai campi \mathbf{B} ed \mathbf{E} , i quali sono invarianti sotto le cosiddette trasformazioni di gauge

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad , \quad \mathbf{A}'^0 = A^0 - \frac{1}{c} \dot{\Lambda} \quad . \quad (2.4)$$

Quindi si può imporre una condizione arbitraria sui potenziali per determinarne la soluzione. Ne considereremo – in alternativa – due:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\mu = \text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{A}^0 = 0 \quad (\text{Gauge di Lorentz}) \quad (2.5)$$

$$\text{div} \mathbf{A} = 0 \quad (\text{Gauge di Coulomb}) \quad (2.6)$$

La gauge di Lorentz è una gauge covariante, in quanto, con la definizione del quadrivettore $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$, $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ si può porre sotto le forme di quadridivergenza $\partial_\mu A^\mu = 0$, e permette di scrivere le equazioni del potenziale in forma covariante a vista. In generale, infatti, le equazioni di Maxwell (2.1), con le definizioni (2.4), si riscrivono nella forma ($\mu = 0, 1, 2, 3$)

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\lambda A^\lambda) = \frac{1}{c} J^\mu \quad , \quad (J^\mu = (c\rho, \mathbf{J})) \quad (2.7)$$

ove $\partial^\mu = g^{\mu\lambda} \partial_\lambda$ e $g^{\mu\lambda} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Quindi, in gauge di Lorentz, esse diventano

$$\square A^\mu = \frac{1}{c} J^\mu \quad , \quad (\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu) \quad (2.8)$$

le quali sono covarianti a vista e si riducono, nelle regioni con $J^\mu = 0$, alle equazioni di d'Alembert per tutte e quattro le componenti di A^μ . Sappiamo però, dalle (2.1) che i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} delle onde elettromagnetiche sono trasversi rispetto alla direzione di propagazione. Ci aspettiamo perciò che due delle componenti di A^μ non siano veri e propri gradi di libertà del campo e che quindi la descrizione basata sulla (2.8) sia ridondante.

La gauge di Coulomb, d'altra parte, restringe bene i gradi di libertà dei potenziali, in quanto $\text{div} \mathbf{A} = 0$ è una condizione di trasversalità, corrispondente a $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) = 0$ in trasformata di Fourier. Inoltre le equazioni (2.7), imponendo $\text{div} \mathbf{A} = 0$, si riscrivono

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta A^0 = -\rho \\ \square \mathbf{A} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_\perp = \frac{1}{c} (\mathbf{J} - \nabla \dot{A}^0) \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Dato che la prima Eq.(2.9) non contiene derivate temporali, il potenziale scalare è determinato univocamente dalla densità di carica ρ come nella equazione di Poisson elettrostatica ed è quindi dato dal potenziale “*istantaneo*”:

$$A^0(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3y}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}, t) \equiv -\frac{1}{\nabla^2} \rho \quad (2.10)$$

dove lo stesso tempo t interviene nei due membri e, in particolare, $A^0 = 0$ per $\rho = 0$. Quindi, solo le *due* componenti trasverse di \mathbf{A} soddisfano l’equazione delle onde di d’Alembert in assenza di sorgenti.

Quando invece vi sono sorgenti, le componenti trasverse \mathbf{J}_\perp soddisfano, per definizione, la condizione $\operatorname{div}\mathbf{J}_\perp = \operatorname{div}\mathbf{J} - \Delta A^0 = \operatorname{div}\mathbf{J} + \dot{\rho} = 0$, grazie alla condizione di conservazione locale della carica elettrica. In alternativa, si può riscrivere simbolicamente $\mathbf{J}_\perp = \mathbf{J} - \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{J})}{\nabla^2}$ rendendo \mathbf{J} trasversa a vista rispetto all’operatore ∇ . Nelle regioni lontane dalle sorgenti la (2.9) ammette soluzioni del tipo

$$A^0 = 0 \quad , \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}[a \quad \vec{\epsilon}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t)}] \quad (2.11)$$

ove $\omega_k = c|\mathbf{k}|$ è la relazione di dispersione delle onde, e $\mathbf{k} \cdot \vec{\epsilon}(\mathbf{k}) = 0$, dato che $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$. Dunque, per ogni vettore d’onda \mathbf{k} , esistono due polarizzazioni trasverse indipendenti che possono essere scelte lungo i vettori reali $\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\mathbf{k})$ ($\alpha = 1, 2$), che formano con \mathbf{k} una terna destrorsa. Tutte le onde che si propagano lungo \mathbf{k} sono sovrapposizioni lineari di queste, con coefficienti complessi a_1 e a_2 . La sovrapposizione con numeri complessi permette di descrivere anche la fase relativa delle oscillazioni lungo i due assi trasversi, e la polarizzazione che ne risulta è in generale ellittica. In particolare i vettori $\vec{\epsilon}^\pm(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\epsilon}^{(1)} \pm i\vec{\epsilon}^{(2)})$ descrivono le polarizzazioni circolari destrorsa e sinistrorsa, dato che il fattore $\pm i$ induce uno sfasamento $\pm \frac{\pi}{2}$ della dipendenza temporale delle oscillazioni lungo i due assi, peraltro di uguale ampiezza.

In conclusione, le onde elettromagnetiche sono dello stesso tipo delle onde trasverse della (1.20). Le componenti scalare e longitudinale di A^μ (presenti nella gauge di Lorentz) sono non fisiche e rappresentano dei g.d.l. di ”pura gauge”.

2.2 Irraggiamento classico. Funzioni di Green

Consideriamo ora il problema dell’irraggiamento, cioè l’emissione di onde del tipo (2.11) da sorgenti $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$, variabili nel tempo e concentrate in una regione spaziale di dimensione a (si può pensare, sia ad emissioni atomiche con $a = 1\text{A}$, sia ad emissione da antenna di dimensioni macroscopiche). In questi casi il campo di radiazione, a distanza $r \gg a$ varia tipicamente come $E \sim B \sim \frac{1}{r}$, in modo che il vettore di Poynting $S_r \sim \frac{1}{r^2}$ dia luogo ad un flusso uscente

finito da una superficie $\sim 4\pi r^2$ che circonda la sorgente. Siamo quindi interessati a trovare la soluzione dell'equazione (2.9) per \mathbf{A} nella regione $r \gg a$, e ad isolare i campi di radiazione di tipo $\frac{1}{r}$, trascurando quelli statici $\sim \frac{1}{r^2}$.

Conviene riscrivere la (2.9) passando alle trasformate di Fourier temporali

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} \mathbf{A}(t, r) e^{i\omega t}, \text{ come}$$

$$(\Delta + k^2) \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = -\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \tilde{\mathbf{J}}_{\perp\omega}(\mathbf{r}) \quad (2.12)$$

e studiare l'equazione di Green corrispondente

$$(\Delta + k^2) G_\omega(\mathbf{r}) = -\delta^3(\mathbf{r}) \quad , \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.13)$$

È facile vedere che le soluzioni dell'equazione omogenea (2.13) sono $\sim \frac{e^{\pm ikr}}{r}$, mentre la sorgente a $\delta(\mathbf{r})$ impone che il flusso uscente del vettore $-\nabla G_\omega$ sia 1 per $r \rightarrow 0$. Ne segue la soluzione generale

$$G_\omega(r) = \frac{C_+(\omega) e^{ikr} + C_-(\omega) e^{-ikr}}{4\pi r} \quad (2.14)$$

con la condizione $C_+ + C_- = 1$. Particolarmenete importanti sono la soluzione ritardata e quella anticipata,

$$G_\omega^{rit}(r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad , \quad G_\omega^{ant}(r) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad , \quad k \equiv \frac{\omega}{c}$$

le quali corrispondono a condizioni al contorno di pura onda uscente (entrante) per $t \rightarrow \infty$. Infatti, la dipendenza temporale corrispondente è data da funzioni delta di Dirac

$$G^{rit}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t - \frac{r}{c}) \quad , \quad G^{ant}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t + \frac{r}{c}) \quad , \quad (2.15)$$

localizzate intorno a $r = c|t|$ per $t > 0$ ($t < 0$) rispettivamente. Di conseguenza, la soluzione della (2.12) si azzera nel lontano passato (futuro), come ci si aspetta per la emissione (assorbimento) di onde e. m..

È anche di particolare importanza, per la trattazione quantistica perturbativa, la condizione al contorno di Feynman in cui $C_+ = \Theta(\omega)$ e $C_- = \Theta(-\omega)$ e quindi le frequenze positive sono ritardate mentre quelle negative sono anticipate. In tal caso si ottiene la distribuzione

$$G_F(t, r) = \frac{c}{4\pi^2 i} \cdot \frac{1}{x^2 - i\epsilon} \quad , \quad (x^2 = c^2 t^2 - r^2). \quad (2.16)$$

la quale permette di tenere in conto la propagazione delle antiparticelle in una teoria relativistica.

La selezione dell'una o dell'altra delle funzioni di Green è fatta in base alle condizioni fisiche iniziali (o finali) del problema. Se non ci sono inizialmente onde e.m., allora la soluzione rilevante è quella ritardata, e si ottiene

$$\mathbf{A}_{rit}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{d^3y}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \mathbf{J}_\perp(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c}, \mathbf{y}) \simeq \frac{1}{4\pi c |\mathbf{x}|} \int d^3y \mathbf{J}_\perp(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} + \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}}{c}, \mathbf{y}) \quad (2.17)$$

dove la seconda espressione è valida nella zona di radiazione, in cui $\mathbf{A} \sim \frac{1}{cr}$. Si noti che il ritardo temporale delle sorgenti ha un termine dipendente dalla coordinata \mathbf{y} di emissione, secondo lo sviluppo $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = (\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}^2)^{\frac{1}{2}} \simeq |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} + o(\frac{|\mathbf{y}|^2}{|\mathbf{x}|})$. Questo termine può essere trascurato solo se in un tempo $\frac{|\mathbf{y}|}{c} \sim \frac{a}{c}$ la sorgente varia poco, cioè se $a \ll \lambda$, ove λ è la lunghezza d'onda della radiazione emessa. In tali condizioni ci si può limitare alla approssimazione di dipolo

$$\mathbf{A}_{dip}(t, \mathbf{x}) \simeq \frac{1}{4\pi c |\mathbf{x}|} \int d^3y \mathbf{J}_\perp(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c}, \mathbf{y}) \quad (2.18)$$

nella quale tutti i punti della sorgente hanno lo stesso ritardo $\frac{|\mathbf{x}|}{c}$. Introducendo la corrente di particella carica $\mathbf{J} = \sum_\alpha e_\alpha \mathbf{v}^{(\alpha)} \delta^3(\mathbf{y} - \xi^{(\alpha)}(t))$, la (2.18) si riscrive nella forma sintetica

$$\mathbf{A}_{dip}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi cr} \sum_\alpha e_\alpha \mathbf{v}_\perp^{(\alpha)}(t - \frac{r}{c}) = \frac{1}{4\pi cr} \dot{\mathbf{D}}_\perp(t - \frac{r}{c}) \quad (2.19)$$

ove $\mathbf{D} = \sum_\alpha e_\alpha \vec{\xi}^{(\alpha)}(t)$ è il momento di dipolo del sistema di cariche considerate.

2.3 Campi e Spettro di Emissione di Dipolo

I campi di radiazione $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ e $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}$ in gauge di Coulomb sono calcolati in modo abbastanza semplice usando due artifici di calcolo. In primo luogo ci si può limitare alle derivate spaziali del ritardo, in quanto $\nabla \frac{1}{r} = O(\frac{1}{r^2})$, mentre $\nabla(\frac{r}{c}) = \frac{\hat{r}}{c} = O(1)$. Di conseguenza, in approssimazione di dipolo,

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \simeq \frac{1}{4\pi c^2 r} \ddot{\mathbf{D}}(t - \frac{r}{c}) \wedge \mathbf{n} \quad , \quad (\mathbf{n} = \hat{r}) \quad (2.20)$$

Inoltre, le componenti trasverse di \mathbf{D} – calcolate attraverso il ritardo $\frac{r}{c}$ – sono semplicemente le componenti trasverse a $\mathbf{n} = \nabla r$. Dunque

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}_\perp = -\frac{1}{c} (\dot{\mathbf{A}} - (\dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi r c^2} (\ddot{\mathbf{D}} \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} \quad (2.21)$$

e quindi \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{n} costituiscono una terna destrorsa con vettore di Poynting

$$\mathbf{S} = c \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{(4\pi)^2 c^3} \frac{\mathbf{n}}{r^2} (\ddot{\mathbf{D}}_\perp(t - \frac{r}{c}))^2 \quad . \quad (2.22)$$

Di qui segue immediatamente la potenza irraggiata per unità di angolo solido

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2 c^3} [\ddot{\mathbf{D}}_\perp(t - \frac{r}{c})]^2 . \quad (2.23)$$

Il caso classico di una antenna lineare di semilunghezza ℓ è ottenuto, con il formalismo dei vettori complessi, ponendo $\dot{\mathbf{D}} = iI\vec{\ell}$, ove $I = I_0 e^{-i\omega t}$. Quindi, nel caso monocromatico di frequenza ω si ottiene $\ddot{\mathbf{D}} = I\omega\vec{\ell}$ e, passando alle parti reali ed effettuandola media temporale,

$$\frac{dW}{d\Omega} = (\frac{k\ell}{4\pi})^2 \frac{1}{c} \frac{I_0^2}{2} \sin^2 \Theta \quad (2.24)$$

ove Θ è l'angolo di emissione rispetto all'antenna, per cui $\ell_\perp = \ell \sin \Theta$. La potenza totale irraggiata è dunque, integrando sull'angolo solido

$$W = \frac{(k\ell)^2 I_0^2}{3c4\pi} \quad (2.25)$$

Si ricordi che stiamo usando unità di misura di Gauss razionalizzate ($\epsilon_0 = 1$), legate al sistema di Gauss da $q^2|_{Gauss} = \frac{q^2|_{raz}}{4\pi}$.

Formule simili valgono nel caso di antenne circolari di raggio ℓ , con corrente $\mathbf{I} = I_0 e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)$. In tal caso la proiezione ortogonale si fa indipendentemente per le componenti 1 e 2 e si ottiene

$$\frac{dW}{d\omega} = (\frac{k\ell}{4\pi})^2 \frac{1}{c} \frac{I_0^2}{2} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \Theta), \quad (2.26)$$

con la stessa potenza totale irraggiata. Si noti però che le distribuzioni angolari (2.24) e (2.26) sono molto diverse, che la luce irraggiata è polarizzata linearmente nel caso di antenna lineare, ed ellitticamente (con semiassi nel rapporto $\cos \Theta : 1$) nel caso circolare.

2.4 Lagrangiana e Hamiltoniana del Campo in Gauge di Coulomb

Abbiamo visto che il campo e.m. è trasverso, cioè le rispettive onde hanno campi \mathbf{E} e \mathbf{B} che formano, con il vettore d'onda \mathbf{k} , una terna destrorsa. Ci si aspetta quindi che la lagrangiana sia simile a quella delle onde elastiche trasverse, come nella (1.14) con $v_L = 0$. Sappiamo però che ci sono quattro funzioni potenziale A^μ , e non due, come ci si aspetterebbe per un'onda trasversa.

Questa descrizione ridondante è poi ridotta dalla invarianza di gauge (2.4) e, in particolare, nella gauge di Coulomb si pone $\text{div} \mathbf{A} = 0$, cioè il potenziale vettore è esplicitamente trasverso.

Inoltre, il potenziale A^0 è fissato dalle (2.10) in termini delle cariche esterne, in particolare $A^0 = 0$ per un campo libero. Quindi, i gradi di libertà si riducono effettivamente a due per vettore d'onda, in questa gauge, che si chiama, per questa ragione, una *gauge fisica*.

Il prezzo da pagare, per una gauge fisica, è che le equazioni del moto non sono covarianti a vista, come appare nella (2.9). I vantaggi sono però preponderanti, ai fini della quantizzazione, in quanto si può seguire una semplice procedura canonica nelle variabili trasverse.

La lagrangiana del campo e.m. libero è uno scalare di Lorentz, dato da ($c = 1$)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.27)$$

con $F^{i0} = E^i = -F_{i0}$, $F^{12} = -B^3$ e cicliche, e quindi

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu}A^\mu \quad . \quad (2.28)$$

È facile verificare che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} = -F^{\mu\nu} \quad , \quad (2.29)$$

e quindi le equazioni di Eulero-Lagrange hanno la forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}) \quad (2.30)$$

e danno due delle equazioni di Maxwell, mentre le altre due sono verificate grazie alla (2.28).

Notiamo anzitutto che la (2.29) permette di definire 3 densità di momento coniugato ad A^i

$$\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = -E^i = \dot{A}^i + \frac{\partial}{\partial x^i}A^0 \quad (2.31)$$

mentre A^0 non ha momento coniugato, in quanto \dot{A}^0 non interviene nella \mathcal{L} agrangiana. Infatti la (2.27) può riscriversi nella forma

$$\mathcal{L} = \vec{\Pi} \cdot \dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{2}(\vec{\Pi}^2 + (rot \mathbf{A})^2) - A^0 div \vec{\Pi} + div(A^0 \vec{\Pi}) \quad (2.32)$$

Si vede dunque che – a parte il termine di divergenza che non modifica le equazioni del moto – A^0 interviene linearmente, come un moltiplicatore di Lagrange. Quindi la legge di Gauss, coniugata ad A^0 ,

$$div \vec{\Pi} = 0 \quad (2.33)$$

è da interpretare come un vincolo che lega le possibili condizioni iniziali dei campi A^i e A^0 ad un tempo fissato, piuttosto che una vera equazione di moto.

Se inoltre imponiamo la condizione di gauge di Coulomb ($div \mathbf{A} = 0$), vediamo che la (2.33) per la (2.31) diviene

$$\Delta A^0 = 0 \quad , \quad (div \mathbf{A} = 0) \quad (2.34)$$

e quindi $A^0 = 0$ per campi regolari all'infinito. Avendo così eliminato il campo A^0 , la trasformata di Legendre sui campi A^i dà, per la (2.32), la Hamiltoniana¹

$$\mathcal{H} = \vec{\Pi} \cdot \dot{\mathbf{A}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{\Pi}^2 + (\text{rot}\mathbf{A})^2) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{A}}^2 + (\text{rot}\mathbf{A})^2) \quad , \quad (2.35)$$

cioè l'usuale densità di energia con la particolarità che $A^0 = 0$.

La procedura che porta dalle (2.27) alle (2.35) può essere ripetuta per il caso di un campo in presenza di cariche esterne descritte dalle correnti $J^\mu(\mathbf{x}, t)$ e con la Lagrangiana di interazione $\mathcal{L}^{(c)} = -J^\mu A_\mu$. La differenza è che in questo caso, A^0 è determinato dal potenziale Coulombiano istantaneo(2.10), mentre la Hamiltoniana acquista la forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{A}}^2 + (\text{rot}\mathbf{A})^2) + \frac{1}{2}(\nabla A^0)^2 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \quad (2.36)$$

dove compare la densità di energia Coulombiana $\frac{1}{2}(\nabla A^0)^2$ e l'interazione di \mathbf{A} con la corrente esterna \mathbf{J} . Le componenti \mathbf{A}^i restano gli unici *g.d.l.* del campo.

2.5 Sviluppo in Modi Propri. Fotoni

La quantizzazione canonica del campo \mathbf{A} non è ovvia, per via della condizione di gauge $\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0$, la quale si diagonalizza nello spazio dei vettori d'onda $(\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t)) = 0$ ma non in quello delle configurazioni, dove è una equazione differenziale che lega le tre componenti. Questo complica la procedura di quantizzazione nello spazio \mathbf{x} . Infatti le regole di commutazione canoniche delle $A_i(\mathbf{x}, t)$ con le $\Pi_j(\mathbf{y}, t) = \dot{A}_j(\mathbf{y}, t)$, sarebbero della forma

$$[A_i(\mathbf{x}, t), \dot{A}_j(\mathbf{y}, t)] = i\hbar\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.37)$$

ma non sono accettabili, perchè in contraddizione con la condizione di gauge secondo cui $\text{div}\mathbf{A} = 0$ deve commutare con le \dot{A}_j . Si devono dunque quantizzare due componenti e non tre, ma non è chiaro a priori come le (2.37) si possano modificare.

Passiamo dunque allo spazio dei vettori d'onda, con lo sviluppo nei modi propri, che in questo caso sono semplicemente le onde piane (2.11). Definendo due vettori di polarizzazione $\vec{\epsilon}^{(1)}$ e $\vec{\epsilon}^{(2)}$, che formano con \mathbf{k} una terna destrorsa, si ottiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \alpha=1,2} \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})V}} [a^\alpha(\mathbf{k})\vec{\epsilon}^\alpha(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t)} + c.c.] \quad . \quad (2.38)$$

¹Strettamente parlando, la trasformata di Legendre andrebbe fatta sulle due componenti di \mathbf{A} essenziali, avendo eliminato la terza con la condizione $\text{div}\mathbf{A} = 0$. Tuttavia, la combinazione scalare $\vec{\Pi} \cdot \mathbf{A}$ ottenuta con questo procedimento, sarebbe la stessa nel sistema solidale con l'onda (z/\mathbf{k}), essendo $\vec{\Pi} \cdot \mathbf{k} = 0$, con lo stesso risultato finale per \mathcal{H} .

Questa volta $\text{div}\mathbf{A} = 0$ per qualsiasi scelta delle ampiezze complesse $a^{(1)}(\mathbf{k})$ e $a^{(2)}(\mathbf{k})$, le quali descrivono quindi due gradi di libertà indipendenti per ogni numero d'onda \mathbf{k} .

Postuliamo allora, per analogia con i campi di spostamento, le regole di commutazione canoniche per ogni coppia di variabili $a^{(\alpha)}(\mathbf{k}), a^{\dagger(\alpha)}(\mathbf{k})$, le quali sono interpretate come operatori di discesa e salita di oscillatori indipendenti:

$$[a^{(\alpha)}(\mathbf{k}), a^{(\beta)}(\mathbf{k}')] = [a^{\dagger(\alpha)}(\mathbf{k}), a^{\dagger(\beta)}(\mathbf{k}')] = 0 \quad , \quad [a^{(\alpha)}(\mathbf{k}), a^{\dagger(\beta)}(\mathbf{k}')] = \hbar\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \quad (2.39)$$

Il significato delle (2.39) è confermato dal calcolo esplicito dell'energia, che secondo la (2.35) è data da

$$H = \int_V d^3x \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{A}}^2 + (rot\mathbf{A})^2) = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \omega \frac{1}{2} (a_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\alpha}(\mathbf{k}) + a_{\alpha}(\mathbf{k}) a_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k})) = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\alpha}(\mathbf{k}) + \frac{\hbar}{2}) \quad (2.40)$$

dove si sono usate le proprietà di ortonormalità dei modi propri, come nella (1.27). Si ottiene dunque l'energia come somma di due oscillatori indipendenti per ogni modo \mathbf{k} di frequenza $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$.

Lo spazio di Fock si costruisce come nel caso dei fononi. Lo stato fondamentale, vuoto dei fotoni è definito da

$$a_{\alpha}(\mathbf{k})|0\rangle = 0 \quad , \quad (\forall \mathbf{k}, \alpha) \quad (2.41)$$

e, riscalando le a di $\sqrt{\hbar}$, si definiscono gli stati della base dei numeri di occupazione

$$\prod_{\alpha, \mathbf{k}} \frac{(a^{(\alpha_1)\dagger}(\mathbf{k}_1))^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \dots \frac{(a^{(\alpha_r)\dagger}(\mathbf{k}_r))^{n_r}}{\sqrt{n_r!}} \dots |0\rangle \equiv |n_1^{(\alpha_1)}, \dots, n_r^{(\alpha_r)}, \dots \rangle \quad (2.42)$$

caratterizzati dalla energia totale

$$E = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \hbar\omega_k (n_k^{(\alpha)} + \frac{1}{2}) \quad . \quad (2.43)$$

Gli indici di eccitazione $n_k^{(\alpha)}$ sono interpretati come numeri di occupazione di fotoni nello stato (\mathbf{k}, α) con polarizzazione $\epsilon^{(\alpha)}(\mathbf{k})$. Tali numeri sono conservati nella teoria di campo libero, ma possono variare nella teoria in interazione con le cariche della materia, dando luogo alle transizioni in cui i fotoni possono essere creati e distrutti, come vedremo.

Se dunque le regole di quantizzazione sono date dalla (2.39), si possono a posteriori calcolare le regole di commutazione delle variabili A_i e \dot{A}_j che sostituiscono la (2.37). Esse sono derivate dallo sviluppo in modi propri (2.38) e sono

$$[A_i(\mathbf{x}, t), \dot{A}_j(\mathbf{y}, t)] = i\hbar(\delta_{ij} - \frac{\nabla_i \nabla_j}{\nabla^2})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = i\hbar(\delta_{ij}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}) \quad . \quad (2.44)$$

La seconda espressione deriva dalle prima perchè il potenziale Coulombiano risolve l'equazione di Poisson. La prima mostra che in effetti $\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ commuta con le \dot{A}_j , ed è conseguenza della relazione di completezza per le polarizzazioni, cioè

$$\sum_{\alpha=1,2} \epsilon_i^{(\alpha)}(\mathbf{k}) \epsilon_j^{(\alpha)}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \quad . \quad (2.45)$$

Dalle (2.45), per trasformata di Fourier, si passa alle (2.44). È da notare che le regole di commutazione (2.44) non sono canoniche e non sono neanche locali, nel senso che hanno una coda non nulla di tipo $\sim |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-3}$. Entrambe queste caratteristiche derivano dal fatto che le variabili A_i non sono indipendenti, ma legate dalla condizione di gauge differenziale $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$.

2.6 Effetto Casimir

Come nel caso dei fononi, l'energia (2.40) dei fotoni attribuisce al vuoto *l'energia di zero* $E_0(V) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\alpha} \hbar \omega_k$, che è divergente come una potenza $\sim k_M^4$, nella regione ultravioletta, di piccole lunghezze d'onda ($|\mathbf{k}| \leq k_M \rightarrow \infty$). Per evitare la divergenza, questa energia può essere sottratta per un volume di quantizzazione di riferimento fissato V . Se tuttavia si pongono condizioni al contorno che confinano il campo in un diverso volume di quantizzazione V' , la differenza di energia che ne risulta è in linea di principio osservabile, come viene evidenziato dall'effetto Casimir.

Consideriamo due lastre metalliche scariche di superficie L^2 , poste a distanza d nel vuoto, e di volume $V_d = L^2 d$. Esse modificano le condizioni di bordo del campo e.m., imponendo che la componente tangenziale del campo sia nulla sulle lastre. Quindi la presenza delle lastre modifica i modi propri della ragione V_d nell'infrarosso, permettendo solo lunghezze d'onda $\lambda \leq d \ll L$. Il taglio di lunghezze d'onda, al di sopra di d , diminuisce l'energia di zero e ha per conseguenza una forza attrattiva fra le lastre.

Quantitativamente, si può considerare il volume V_d immerso nel volume $V = L^3$ di riferimento, lasciando libero un volume $V' = V - V_d = L^2(L-d)$ per il campo e.m. fuori delle lastre. La differenza di energia di zero fra questa configurazione e quella di riferimento è dunque

$$\begin{aligned} \Delta E_d &= E_0(V_d) + E_0(V') - E_0(V) = \\ &= L^2 d \int_{\frac{2\pi}{d}}^{k_M} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \hbar \omega_k + L^2(L-d) \int_{\frac{2\pi}{L}}^{k_M} -L^3 \int_{\frac{2\pi}{L}}^{k_M} \simeq \\ &\simeq -L^2 d \int_{\frac{2\pi}{L}}^{\frac{2\pi}{d}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \hbar c |\mathbf{k}| = -\frac{\pi^2 \hbar c}{d^3} L^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ne deriva una pressione attrattiva

$$p_0 = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial \Delta E_d}{\partial d} = -\frac{3\pi^2 \hbar c}{d^4} \quad (2.47)$$

Si noti che la (2.46) dà luogo ad una energia finita per unità di superficie, per cancellazione della parte ultravioletta, tagliata da k_M . Tuttavia, la dipendenza angolare della cancellazione è complicata e il calcolo rigoroso dà luogo a un coefficiente numerico diverso nel risultato (2.47), che è solo qualitativamente corretto. La natura quantistica del risultato è chiara per via del numeratore $\hbar c$. Dato che $\frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137}$, la pressione (2.47) corrisponde a quella di un normale condensatore con una carica, su di una superficie di lato d , di una dozzina di elettroni in tutto(!). L'effetto Casimir può dunque essere rilevato solo con esperimenti di grandissima precisione. Tuttavia, la sua importanza concettuale è grande, perché conferma la espressione (2.40) dell'energia, incluso il termine di ordinamento, origine dell'energia di zero $\frac{1}{2}\hbar\omega_k$ per modo.

2.7 Esercizi e Complementi

1 - Unitá di misura

- Scrivere le equazioni di Maxwell nel vuoto nei sistemi MKSA, Gauss e Gauss Razionalizzato (Heaviside) e la corrispondente forma del potenziale Coulombiano e della forza di Lorentz

- Dare i fattori di conversione seguenti:

$1\text{Coulomb} = ? [\text{Gauss}] = ? [\text{G.R.}]$

$1\text{Weber}/m^2 = ? [\text{Gauss}] = ? [\text{G.R.}]$

$$\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7}c^2 \simeq 9 \cdot 10^9 N m^2 C^{-2}\right)$$

2 - Onde Piane

I potenziali $A^0 = 0$, $\mathbf{A} = (a \vec{\epsilon} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)) + c.c.)$, con $\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$, $\mathbf{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0$, descrivono onde monocromatiche nella gauge di Coulomb.

- Dare le espressioni dei campi elettrico e magnetico e mostrare che la condizione di gauge è soddisfatta.
- Studiare la dipendenza temporale e la polarizzazione del campo elettrico nei casi particolari: $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_3$, $A = \frac{1}{ik}C$, $C = C^*$, con $\vec{\epsilon} = \mathbf{e}_1$, $\vec{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2)$, $\vec{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2)$.

3 - Onde in una dimensione

Le onde elettromagnetiche piane che si propagano in direzione z ubbidiscono all'equazione di d'Alembert unidimensionale:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} A_j(z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_j(z, t) \quad (j = x, y)$$

- Mostrare che funzioni A_j della forma $f(z - ct) + g(z + ct)$ sono soluzioni della precedente equazione. Dare la forma di f e g per onde piane monocromatiche di polarizzazione lungo x , con $\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \mathbf{e}_3$ oppure $\mathbf{k} = -|\mathbf{k}| \mathbf{e}_3$.
- Sempre per polarizzazione lungo x , determinare f e g per $A_x(z, 0) = a\Theta(L - |z|)$, $\dot{A}_x(z, 0) = 0$.

4 - Conservazione dell'Energia

Sempre per polarizzazione lungo x e propagazione lungo z , calcolare densità di energia, u , e vettore di Poynting, \mathbf{S} , per l'onda progressiva destra $A_x(z, t) = f(z - ct)$, $A_y = A_z = 0$.

Verificare la conservazione locale dell'energia $\dot{u} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0$, tenuto conto che $\operatorname{div} \mathbf{S}$ si riduce a $\frac{\partial}{\partial z} S_z$.

5 - Irraggiamento di Dipolo

Una sorgente dipolare $\mathbf{D}(t) = R\mathbf{e}(\mathbf{D}_0 e^{-i\omega t})$ emette onde elettromagnetiche. Dare l'espressione della potenza irraggiata per unità di angolo solido a distanza r , tempo t e direzione $\mathbf{n} = \hat{r} = \mathbf{r}/r$, in approssimazione di dipolo.

- Considerare esplicitamente $\mathbf{D}_0 = \mathbf{e}_3 q A$ (A reale) e dare la distribuzione angolare in θ, ϕ come funzione del tempo e come media temporale. Dare la potenza irraggiata in media.
- Considerare il caso $\mathbf{D}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2)qA$ e ripetere il calcolo, sia della distribuzione angolare, sia della potenza irraggiata totale. Qual'è la polarizzazione dell'onda emessa, in funzione di θ e ϕ ? Paragonare col caso precedente.
- Dare l'ordine di grandezza della potenza irraggiata da un atomo con un elettrone attivo ($q = 1.6 \cdot 10^{-19} C$, $A = 10^{-8} cm$) con $\lambda = 500 nm$. Quanti atomi devono irraggiare per avere una potenza di 100 $Watt$? Qual'è l'ordine di grandezza del fattore di Boltzmann corrispondente?

6 - Funzioni di Green

Costruire la soluzione generale a simmetria sferica dell'equazione di d'Alembert omogenea, sapendo che in trasformata di Fourier soddisfa l'equazione

$$(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2})f_\omega(r) = 0$$

- Dimostrare che la differenza fra due funzioni di Green é soluzione dell'equazione omogenea.
- Costruire la funzione di Green tale che l'ampiezza delle onde uscenti sia in rapporto 3 : 1 con quella delle onde entranti.

7 - Campo elettromagnetico in una scatola

Mostrare che il campo e.m. racchiuso in una scatola metallica cubica di lato L é descritto, in gauge di Coulomb, dai potenziali $A^0 = 0$ e \mathbf{A} dato da:

$$A^1 = C_1 \cos(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \sin(k_3 x_3) \cos(\omega t + \phi)$$

$$A^2 = C_2 \sin(k_1 x_1) \cos(k_2 x_2) \sin(k_3 x_3) \cos(\omega t + \phi)$$

$$A^3 = C_3 \sin(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \cos(k_3 x_3) \cos(\omega t + \phi)$$

con $\omega = c|\mathbf{k}|$, $k_i = n_i \pi / L$, $n_i = 0, 1, \dots$ e $\mathbf{k} \cdot \mathbf{C} = 0$.

(Si tratta di verificare non solo l'equazione di d'Alembert ma anche $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ e la condizione di bordo dei metalli che $\mathbf{E}_{tang}|_{bordo} = 0$)

Capitolo 3

Emissione, assorbimento e diffusione di fotoni

3.1 Interazione radiazione–materia. Processi elementari

Sappiamo che, a livello classico, il campo elettromagnetico (em) influenza il moto delle cariche, le quali, a loro volta, possono generare onde elettromagnetiche, se sono accelerate. Tuttavia, la teoria classica non è in grado di descrivere le regole di transizione atomiche, le quali sono un'indicazione non solo dello spettro discreto degli atomi (di natura quantistica), ma anche dell'emissione (assorbimento) di luce in quanti discreti. La teoria dei campi è in grado, invece, di collegare questi due fatti in quanto è capace di descrivere processi con variazione del numero di fotoni. Vedremo inoltre che questi processi sono innescati dalla normale interazione tra atomi e campi elettromagnetici. Si ottiene allora la teoria quantistica della radiazione, che rappresenta storicamente il primo successo della teoria dei campi applicata agli atomi e alle particelle subatomiche.

La descrizione delle interazioni radiazione–materia si basa sulla lagrangiana di una o più particelle cariche in campo em. Questa contiene, oltre alla lagrangiana libera del campo e delle particelle, anche un termine di interazione del tipo $J_\mu A^\mu$, come segue (in unità per cui $c = 1$):

$$L = \sum_r \left(\frac{1}{2} m_r \dot{\boldsymbol{\xi}}_r^2 - e_r A_0(\boldsymbol{\xi}_r, t) + e_r \dot{\boldsymbol{\xi}}_r \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}_r, t) \right) + \int d^3x \mathcal{L}_{e.m.} \quad (3.1)$$

dove le $\boldsymbol{\xi}_r(t)$ sono le traiettorie delle cariche e_r ($r = 1, \dots, N$). Dalle equazioni di Eulero–Lagrange della (3.1) si possono verificare esplicitamente le equazioni del moto delle cariche, inclusa la forza di Lorentz, facendo attenzione ad includere correttamente tutti i termini delle derivate temporali, inclusi quelli impliciti tramite le $\boldsymbol{\xi}_r(t)$.

Per ottenere la hamiltoniana del sistema campo-particelle bisogna fare una trasformata di Legendre sulla (3.1), sia per i g.d.l. del campo che per quelli di particella. I momenti coniugati alle ξ_r sono, al tempo di quantizzazione $t = 0$,

$$\mathbf{p}_r = m_r \dot{\xi}_r + e_r \mathbf{A}_r(\xi_r, 0) \quad (3.2)$$

mentre le densità di momenti coniugati alle \mathbf{A}_r sono le $\boldsymbol{\Pi}_r$ della (2.31). Entrambi i tipi di momenti non sono puramente cinetici e questo complica un po' l'algebra dell'espressione.

$$H = \sum_r \mathbf{p}_r \cdot \dot{\xi}_r + \int d^3x \boldsymbol{\Pi} \cdot \dot{\mathbf{A}} - L \quad (3.3)$$

Nella gauge di Coulomb $\text{div } \mathbf{A} = 0$, il campo A_0 compare ancora come moltiplicatore di Lagrange (cioè senza derivata temporale) e l'equazione del moto coniugata ad A_0 è la legge di Gauss

$$\text{div } \boldsymbol{\Pi} = -\Delta A_0 = \varrho \quad (3.4)$$

dove $\varrho(\mathbf{x}, t) = \sum_r e_r \delta^3(\mathbf{x} - \xi_r(0))$ è la densità di carica delle particelle. Dunque il campo A_0 è dato dal campo coulombiano istantaneo indotto dalle cariche e_r :

$$A_0(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3y}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \varrho(\mathbf{y}, 0) = \frac{1}{4\pi} \sum_r \frac{e_r}{|\mathbf{x} - \xi_r(0)|} \quad (3.5)$$

L'espressione completa dell'hamiltoniana (3.3) contiene i termini cinetici delle particelle nel campo trasverso \mathbf{A} , la parte di radiazione em libera e la parte coulombiana, come segue

$$H = \sum_r \frac{(\mathbf{p}_r - e_r \mathbf{A}(\xi_r, 0))^2}{2m_r} + \int d^3x \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{A}}^2(\mathbf{x}, 0) + (\text{rot } \mathbf{A})^2] + \frac{1}{2} \int d^3x (\nabla A_0(\mathbf{x}, 0))^2 \quad (3.6)$$

L'ultimo termine, per via della (3.5), può anche scriversi nella forma

$$V_{Coul} = \frac{1}{2} \int_{V_{reg}} d^3x (\nabla A_0)^2 = \frac{1}{8\pi} \sum_{r \neq s} \frac{e_r e_s}{|\xi_r(0) - \xi_s(0)|} \quad (3.7)$$

dove nell'integrale di volume regolarizzato sono stati sottratti i termini di auto-energia, cioè le parti singolari di interazione di ciascuna particella carica con se stessa, le quali non dipendono dalle coordinate ξ_r .

Noi siamo interessati ad un sistema atomico in interazione em. L'atomo libero è descritto dall'hamiltoniana

$$H_{at} = \sum_r \frac{\mathbf{p}_r^2}{2m_r} + V_{Coul} \quad (3.8)$$

la quale predice, secondo la meccanica quantistica, uno spettro discreto e uno continuo dell'atomo considerato, con autostati $|A\rangle = |n, j, l, s, j_z, \dots\rangle$. D'altra parte, la radiazione libera è descritta dall'hamiltoniana

$$H_{rad} = \int d^3x \frac{1}{2} : [\dot{\mathbf{A}}^2 + (rot \mathbf{A})^2] : = \sum_{\alpha, \mathbf{k}} \hbar \omega_k a_k^{+(\alpha)} a_k^{(\alpha)} \quad (3.9)$$

dove è stata sottratta l'energia di zero introducendo il prodotto “normale” – in cui gli operatori di distruzione sono spostati a destra – e gli operatori di salita e discesa sono stati riscalati di $\sqrt{\hbar} : a_k^{(\alpha)} \longrightarrow \sqrt{\hbar} a_k^{(\alpha)}$. Pertanto $[a_k^{(\alpha)}, a_h^{+(\beta)}] = \delta_{\alpha, \beta} \delta_{h, k}$ e gli stati fotonici $|n_1^{(\alpha_1)}, \dots, n_k^{(\alpha_k)}\rangle$ sono determinati dai numeri di occupazione $n_k^{(\alpha)}$ nei vari modi \mathbf{k} del campo, con polarizzazione $\epsilon^{(\alpha)}(\mathbf{k})$ ($\alpha = 1, 2$). Quindi l'hamiltoniana completa (3.6) si scrive

$$H = H_{at} + H_{rad} + V = H_0 + V \quad (3.10)$$

dove

$$V = - \sum_r e_r \frac{\mathbf{p}_r \cdot \mathbf{A}(\xi_r, 0)}{m_r} + \sum_r e_r^2 \frac{\mathbf{A}^2(\xi_r, 0)}{2m_r} \quad (3.11)$$

rappresenta l'interazione del sistema atomo–radiazione e la quantizzazione nella formulazione di Schrödinger è effettuata a $t = 0$.

È da notare in primo luogo che l'interazione contiene sia gli operatori ξ_r, \mathbf{p}_r nello spazio di Hilbert dell'atomo \mathcal{H}_{at} , sia gli operatori \mathbf{A} , lineari in $a_k^{(\alpha)}, a_k^{+(\alpha)}$, i quali agiscono sullo spazio di Fock \mathcal{H}_{rad} del campo. Quindi, lo spazio “di Hilbert” completo da considerare è $\mathcal{H}_{at} \otimes \mathcal{H}_{rad}$. Si usa anche dire che le ξ_r, \mathbf{p}_r sono operatori di prima quantizzazione, in quanto non fanno variare il numero di particelle, mentre $a_k^{(\alpha)}$ e $a_k^{+(\alpha)}$ sono di seconda quantizzazione, in quanto fanno variare il numero di fotoni n . Termini lineari in \mathbf{A} danno i processi con $\Delta n = \pm 1$ e termini quadratici i processi con $\Delta n = \pm 2$. Notiamo peraltro che l'interazione (3.11) ha sia termini lineari del tipo $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ che termini quadratici e quindi causa sia processi con $\Delta n = \pm 1$ con ampiezza proporzionale alla carica e dell'elettrone, sia processi con $\Delta n = \pm 2$, con ampiezza $\simeq e^2$. I primi sono i processi fondamentali di assorbimento ($\Delta n = -1$) e di emissione ($\Delta n = +1$), i secondi danno luogo ai processi a due fotoni ($\Delta n = \pm 2$) e alla diffusione ($\Delta n = 0$).

Per ottenere predizioni quantitative sui vari processi a partire dalle (3.10) è necessario esprimere l'ampiezza di transizione in funzione degli elementi di matrice di V , chiamati anche vertici di transizione. Questo problema teorico è risolto dalla teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, la quale esprime le ampiezze di transizione come serie di potenze nel piccolo parametro $e \simeq \sqrt{\alpha}$, dove, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c}$ è la costante di struttura fina.

3.2 Rappresentazione di interazione. Regola d'oro di Fermi

L'ampiezza di transizione è collegata, a grandi linee, con l'operatore di evoluzione $\mathcal{U}(+\infty, -\infty)$, dal lontano passato al lontano futuro. Per precisare questo concetto occorre pensare che nel passato (e nel futuro) il sistema è descritto da $H_0 = H_{at} + H_{rad}$, cioè che l'interazione radiazione-materia diventi inefficace – in altre parole si “spenga” – in quanto fotoni e atomi sono sufficientemente allontanati tra loro, come in realtà succede negli esperimenti. Questa separazione a grandi tempi può essere ottenuta o tenendo conto delle dimensioni finite dei pacchetti d'onda dei fotoni, oppure, più semplicemente, anche con onde piane introducendo artificialmente un fattore di spegnimento adiabatico nel potenziale: $V \rightarrow V e^{-\varepsilon|t|}$. In tal caso l'interazione è efficace solo per un tempo finito $\mathcal{T} \simeq \frac{2}{\varepsilon}$ e questo è sufficiente per ottenere una buona definizione della matrice di transizione per $\varepsilon > 0$, facendo poi il limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ alla fine dei calcoli.

Anche introducendo lo spegnimento adiabatico, risulta che la rappresentazione di Schrödinger non è affatto conveniente per la definizione del limite di grandi tempi, a causa dei fattori oscillanti $e^{-i\frac{E_n^{(0)}}{\hbar}t}$, che caratterizzano gli autostati liberi. Si definisce allora la rappresentazione “di interazione” come la rappresentazione in cui gli autostati liberi sono indipendenti dal tempo, ponendo

$$\mathcal{U}_I(t, t_0) = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} \mathcal{U}(t, t_0) e^{-i\frac{H_0 t_0}{\hbar}} \quad (3.12)$$

dove $\mathcal{U}(t, t_0)$ è il normale operatore di evoluzione in rappresentazione di Schrödinger, tale che $i\hbar\dot{\mathcal{U}} = H\mathcal{U}$. Sostituendo questa equazione nella (3.12), si ottiene

$$i\hbar\dot{\mathcal{U}}_I(t, t_0) = H_I(t)\mathcal{U}_I(t, t_0) \quad \mathcal{U}_I(t_0, t_0) = 1 \quad (3.13)$$

dove $H_I(t) = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} V e^{-\varepsilon|t|} e^{-i\frac{H_0 t_0}{\hbar}}$ è il potenziale di interazione in rappresentazione di interazione. Notiamo subito che $\dot{\mathcal{U}}_I$ è proporzionale a V , e quindi si azzerà a grandi tempi: cioè i fattori oscillanti indesiderati sono stati eliminati. Si può allora definire la matrice \mathcal{S} in rappresentazione di interazione

$$\mathcal{S} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{U}_I(+\infty, -\infty) \quad (3.14)$$

e la matrice di transizione T_{fi} , collegate dalla equazione

$$\mathcal{S}_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i\delta(E_f - E_i)T_{fi} \quad (3.15)$$

dove sono da notare la sottrazione dall'identità $\mathbf{1}$ – che non contiene processi di transizione – e il fattore delta di conservazione dell'energia (nel limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$), dovuto al fatto che l'hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo. Pertanto S_{fi} , nel limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$, è un operatore singolare di tipo distribuzione.

Le quantità osservabili indotte dalle (3.15) dipendono dalla natura degli stati i e f . Normalmente in fisica delle particelle gli stati finali (o anche quello iniziale) non sono normalizzabili. Ad esempio si può avere $i = A$ e $f = A' + \{\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{k}\}$, dove A e A' sono stati di un atomo di energia e impulso definiti e $\{\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{k}\}$, è un fotone di impulso \mathbf{k} e polarizzazione $\boldsymbol{\varepsilon}$. In casi di questo genere l'unitarietà di \mathcal{U} (e quindi di \mathcal{S}) implica che $|S_{fi}|^2$ sia una distribuzione di probabilità normalizzata solo nel senso continuo. La quantità calcolabile è una densità di probabilità per unità di tempo, data dall'espressione (regola d'oro di Fermi)

$$dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) |T_{fi}|^2 d\phi_f \quad (3.16)$$

dove $d\phi_f$ è l'elemento di volume nello spazio delle fasi finale (cf. sez. 1.6). Questa quantità è direttamente osservabile nel caso di decadimento di uno stato iniziale (ad es. atomico) metastabile, mentre differisce per il fattore di flusso dalla sezione d'urto osservabile nel caso di due particelle o atomi nello stato iniziale.

La derivazione della (3.16) richiederebbe un'analisi dettagliata della probabilità di transizione $|\mathcal{U}_I(t, -\infty)|^2$ e della sua derivata, però si può capire approssimativamente dalla (3.15). Notiamo infatti che la “probabilità di transizione”

$$|S_{fi}|^2 = 2\pi\delta(E_f - E_i) 2\pi\delta(0) |T_{fi}|^2 \quad (3.17)$$

è divergente anche nel senso delle distribuzioni per la presenza del fattore $2\pi\delta(0)$. Introducendo il fattore di spegnimento adiabatico esso può essere sostituito dalla quantità

$$2\pi\delta(0) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} dt e^{-\varepsilon|t|} = \frac{2}{\varepsilon} = \mathcal{T} \quad (3.18)$$

che può essere interpretata come il tempo di interazione, il quale diventa finito a causa del fattore di spegnimento. Si vede dunque, come nel caso di energia conservata, la probabilità di transizione a grandi tempi cresce linearmente col tempo di interazione. Bisogna allora definire una probabilità per unità di tempo, che, per stati finali del continuo è la densità

$$\frac{dw_{fi}}{d\phi_f} = \frac{|S_{fi}|^2}{\mathcal{T}} = 2\pi\delta(E_f - E_i) |T_{fi}|^2 \quad \text{per } i \neq f \quad (3.19)$$

in accordo con la (3.16).

3.3 La serie perturbativa della matrice di transizione

Con il metodo perturbativo, l'equazione di Schroedinger in rappresentazione di interazione (3.13) viene risolta iterativamente per $\mathcal{U}_I(t, t_0)$. Notiamo anzitutto che la condizione $\mathcal{U}_I(t_0, t_0) =$

1 può essere inglobata nella (3.13) riscrivendola come equazione integrale di Volterra

$$\mathcal{U}_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \mathcal{U}_I(t', t_0) \quad (3.20)$$

e questa può essere risolta per iterazione, partendo da $\mathcal{U}^{(0)} = 1$:

$$\mathcal{U}_I(t, -\infty) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_I(t') + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \dots \quad (3.21)$$

La (3.21) dà formalmente l'espressione di $\mathcal{U}_I(t, -\infty)$, e quindi di \mathcal{S} , come serie di potenze di H_I – o meglio di un parametro λ che rappresenta l'o.d.g. di H_I . In generale, non esiste una forma chiusa della serie perturbativa (3.21). La difficoltà è che $H_I(t)$ è un operatore, e che in genere $[H_I(t_1), H_I(t_2)] \neq 0$ per $t_1 \neq t_2$, cioè gli H_I non commutano a tempi diversi. In tal caso la forma esponenziale $\sim e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' H_I(t')}$ non è una soluzione valida della (3.13).

La soluzione perturbativa della matrice $\mathcal{S} = \mathcal{U}_I(\infty, -\infty)$ si ottiene dunque dalla (3.21) per $t \rightarrow \infty$ e si riscrive in forma più semplice passando agli elementi di matrice, ed effettuando le integrazioni temporali. Infatti

$$\mathcal{S}_{fi} = \mathcal{S}_{fi}^{(0)} + \mathcal{S}_{fi}^{(1)} + \mathcal{S}_{fi}^{(2)} + \dots \quad (3.22)$$

dove $\mathcal{S}_{fi}^{(0)} = \delta_{fi}$ e, al primo ordine perturbativo

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{fi}^{(1)} &= \frac{-i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle f | e^{i \frac{H_0 t}{\hbar}} V e^{-i \frac{H_0 t_0}{\hbar}} | i \rangle e^{-\varepsilon |t|} = \frac{-i}{\hbar} V_{fi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-(i \omega_{fi} t + \varepsilon |t|)} \\ &= -\frac{2i\pi}{\hbar} V_{fi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega_{fi}^2} \frac{1}{\pi} = -2i\pi \delta(E_f - E_i) T_{fi}^{(1)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Questa derivazione del primo ordine perturbativo (approssimazione di Born)

$$T_{fi}^{(1)} = V_{fi} \quad (3.24)$$

mostra gli aspetti essenziali del problema. Innanzitutto, lo spegnimento adiabatico fornisce una rappresentazione regolarizzata di larghezza $\Delta\omega \simeq \frac{2}{T}$, della delta di conservazione dell'energia, che si ottiene dall'integrazione temporale nel limite $T \rightarrow \infty$.

In secondo luogo, troncando a t l'integrazione, si ottengono le ampiezze e probabilità di transizione a tempo finito $t > 0$:

$$\mathcal{U}_{fi}^{(1)}(t, -\infty) = -\frac{i}{\hbar} V_{fi} \left[\frac{1 - e^{-(\varepsilon + i\omega_{fi} t)}}{(\varepsilon + i\omega_{fi} t)} + \frac{1}{(\varepsilon - i\omega_{fi} t)} \right] \quad (3.25)$$

$$p_{fi}^{(1)}(t) \simeq 2\pi \delta_{\varepsilon} \left(\frac{E_f - E_i}{\hbar} \right) \left| \frac{V_{fi}}{\hbar} \right|^2 \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{e^{-2\varepsilon t}}{2\varepsilon} - \frac{2e^{-\varepsilon t}}{\varepsilon} + \dots \right) \quad (3.26)$$

dove $\pi\delta_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$. Di qui si vede facilmente che

$$\frac{dw_{fi}}{d\phi_f} = \frac{dp_{fi}^{(1)}}{dt} = 2\pi\delta_\varepsilon(\omega_{fi}) \left| \frac{V_{fi}}{\hbar} \right|^2 (2e^{-\varepsilon t} - e^{-2\varepsilon t}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{2\pi}{\hbar}\delta(E_f - E_i)|V_{fi}|^2 \quad (3.27)$$

e si ottiene quindi il risultato (3.16), nel caso particolare (3.24). È da notare come la probabilità (3.26) soddisfa

$$\sum_{f \neq i} p_{fi}^{(1)} \simeq \int_{f \neq i} d\phi_f |V_{fi}|^2 \frac{2\pi}{\hbar}\delta_\varepsilon(E_f - E_i)\mathcal{T} = \frac{\mathcal{T}}{\tau} < 1 \quad (3.28)$$

che implica la condizione $\mathcal{T} < \tau$, dove τ è la vita media dello stato iniziale, quale condizione di validità della trattazione perturbativa.

Le integrazioni temporali della (3.21) possono essere effettuate nella (3.22) anche a ordini superiori. Si otterrà così la forma (3.15) della matrice \mathcal{S} , con una rappresentazione esplicita per la matrice di transizione, data da

$$\mathcal{T}_{fi} = V_{fi} + \left(V \frac{1}{E_i - H_0 + i\varepsilon} V \right)_{fi} + \left(V \frac{1}{E_i - H_0 + i\varepsilon} V \frac{1}{E_i - H_0 + i\varepsilon} V \right)_{fi} + \dots \quad (3.29)$$

dove

$$G_0(E_i) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (E_i - H_0 + i\varepsilon)^{-1} \quad (3.30)$$

è l'operatore di Green dell'hamiltoniana libera.

Consideriamo, ad esempio, il terzo termine della (3.21), che per $t \rightarrow +\infty$ dà l'espressione di secondo ordine della matrice \mathcal{S} (3.22). Passando agli elementi di matrice e introducendo la variabile $\tau = t_1 - t_2 > 0$ si può scrivere nella forma

$$\mathcal{S}_{fi}^{(2)} = \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-\varepsilon|t|} e^{i\frac{(E_f - E_i)t}{\hbar}} \int_0^{+\infty} d\tau < f | V e^{i\frac{(H_0 - E_i)\tau}{\hbar}} V | i > e^{-\varepsilon|t-\tau|} \quad (3.31)$$

Notiamo ora che, nella (3.31), sia $|t|$ che τ sono tagliati a valori del'ordine $\sim \frac{1}{\varepsilon}$. Pertanto si può rimpiazzare $e^{-\varepsilon|t-\tau|} \rightarrow e^{-\varepsilon\tau}$, rendendo indipendenti le integrazioni su t e $\tau > 0$. L'integrazione su t produce una delta di conservazione dell'energia e quella su τ la funzione di Green libera. Si ottiene dunque

$$\mathcal{T}_{fi}^{(2)} = \left(V \frac{1}{E_i - H_0 + i\varepsilon} V \right)_{fi} = \int d\phi_n \frac{V_{fn} V_{ni}}{E_i - E_n + i\varepsilon} \quad (3.32)$$

dove la presenza di $+i\varepsilon$ al denominatore regolarizza la singolarità per $E_i = E_n$ dell'integrazione in $d\phi_n$ nel caso continuo.

In seguito applicheremo la (3.29) ai problemi di emissione e assorbimento regolati dall'interazione (3.11), tenendo presente che $V = V^{(1)} + V^{(2)}$, dove

$$V^{(1)} = - \sum_r e_r \frac{\mathbf{p}_r \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}_r, 0)}{m_r}, \quad V^{(2)} = \sum_r e_r^2 \frac{\mathbf{A}^2(\boldsymbol{\xi}_r, 0)}{2m_r} \quad (3.33)$$

Se classifichiamo l'ampiezza come serie di potenze nel parametro e (carica dell'elettrone), otteniamo allora, limitandoci al secondo ordine

$$\mathcal{T}_{fi}^{(1)} = V_{fi}^{(1)}, \quad \mathcal{T}_{fi}^{(2)} = V_{fi}^{(2)} + (V^{(1)} G_0(E_i) V^{(1)})_{fi} \quad (3.34)$$

3.4 Transizioni di emissione e assorbimento. Approssimazione di dipolo

La classe più semplice dei processi è quella con $\Delta n = \pm 1$ e corrisponde a transizioni atomiche accompagnate dall'assorbimento o emissione di un fotone. L'ampiezza all'ordine più basso è di ordine e , ed è data, per la (3.34), dagli elementi di matrice dell'interazione di primo ordine $V^{(1)}$. Dato che, in un sistema atomico neutro, i protoni hanno una massa molto più grande dell'elettrone ($m_p \sim 2000m_e$), ci si può limitare ai contributi elettronici scrivendo

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= -\frac{e}{m} \sum_r \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}_r, 0) \\ &= -e \sum_r \mathbf{v}_r \cdot \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} V}} (\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)}(\mathbf{k}) a_{\alpha}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}_r} + c.c.) \end{aligned} \quad (3.35)$$

dove $\mathbf{v}_r = \frac{\mathbf{p}_r}{m}$ è l'operatore velocità dell'elettrone r -esimo e $\mathbf{p}_r = -i\hbar \nabla_{\boldsymbol{\xi}_r}$ in rappresentazione delle coordinate. Come stati iniziali e finali consideriamo

$$|i\rangle = |A\rangle |\cdots, n_{\mathbf{k}, \alpha}, \cdots\rangle, \quad |f\rangle = |A'\rangle |\cdots, n_{\mathbf{k}, \alpha} \pm 1, \cdots\rangle \quad (3.36)$$

in cui cui il numero di occupazione $n_{\mathbf{k}, \alpha}$ è variato di $+1$ (emissione), oppure -1 (assorbimento), mentre tutti gli altri $n_{\mathbf{k}', \alpha'}$ sono inalterati. Dalla (3.35) si ottiene, per l'assorbimento

$$V_{A'A}(\Delta n = -1) = \frac{-e}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} V}} \sqrt{n_{\mathbf{k}, \alpha} \hbar} \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)}(\mathbf{k}) \cdot \sum_r (\mathbf{v}_r e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}_r})_{A'A} \quad (3.37)$$

e, per l'emissione

$$V_{AA'}(\Delta n = +1) = \frac{-e}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} V}} \sqrt{(n_{\mathbf{k}, \alpha} + 1) \hbar} \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)*}(\mathbf{k}) \cdot \sum_r (\mathbf{v}_r e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}_r})_{AA'} \quad (3.38)$$

Notiamo che la differenza sostanziale tra (3.37) e (3.38) è che il fattore fotonico cambia da \sqrt{n} a $\sqrt{n+1}$ per via della diversa azione degli operatori di discesa e salita:

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (3.39)$$

In particolare a^+ crea un fotone anche dal vuoto e implica quindi nella (3.38) un elemento di matrice non nullo per l'emissione spontanea, quando cioè non c'è onda em incidente ($n_{\mathbf{k},\alpha} = 0$). Più precisamente si ha la relazione

$$V_{AA'}(\Delta n = +1) = \sqrt{\frac{n_{\mathbf{k},\alpha} + 1}{n_{\mathbf{k},\alpha}}} [V_{A'A}(\Delta n = -1)] \quad (3.40)$$

che collega le densità di probabilità di emissione e assorbimento per unità di spazio delle fasi $d\phi = \frac{d^3 k V}{(2\pi)^3}$:

$$\begin{aligned} dw_{AA'}^{(em)} &= \frac{n_{\mathbf{k},\alpha} + 1}{n_{\mathbf{k},\alpha}} dw_{A'A}^{(as)} \\ &= \frac{d^3 k}{(2\pi)^2} \frac{e^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} (n_{\mathbf{k},\alpha} + 1) \left| \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)*}(\mathbf{k}) \cdot \sum_r (\mathbf{v}_r e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}_r})_{AA'} \right|^2 \delta(E_A - E_{A'} - \hbar\omega_{\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Vedremo tra breve un'applicazione della relazione (3.41).

Notiamo ora che, in molte situazioni, si può approssimare l'elemento di matrice delle (3.37) e (3.38) ponendo

$$e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}_r} \simeq e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}_r} \simeq 1 \quad (3.42)$$

(approssimazione di dipolo) in quanto ξ è di ordine di a e $ka \ll 1$ o anche $a \ll \lambda$, dove a indica il raggio atomico e λ la lunghezza d'onda della radiazione emessa (ad esempio $\lambda > 100\text{nm}$ nel visibile). Si ottiene allora per l'emissione

$$V_{AA'} = \sqrt{\frac{(n_{\mathbf{k},\alpha} + 1)}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)*}(\mathbf{k}) \left(\dot{\mathbf{D}} \right)_{AA'} \quad (3.43)$$

dove $\mathbf{D} = e \sum_r \boldsymbol{\xi}_r$ è l'operatore di dipolo elettrico. Abbiamo visto nel Cap. 2 che l'approssimazione di dipolo corrisponde classicamente a trascurare la dipendenza del ritardo della radiazione dai punti della sorgente. Dalla (3.42) vediamo che, quantisticamente, essa significa trascurare il vettore d'onda \mathbf{k} nella funzione d'onda del fotone, ovvero il rinculo dell'atomo dovuto all'emissione di un fotone di impulso $\hbar\mathbf{k}$.

Calcoliamo ora la probabilità di transizione per unità di tempo dell'emissione di un fotone nella transizione $A' \rightarrow A$. Dalle (3.27), (3.37) e (3.41), usando la delta di conservazione per integrare sull'energia $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$ del fotone finale si ottiene

$$\frac{dw_e}{d\Omega_{\mathbf{k}}} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{c^2} \left| \left(\sum_r \dot{\boldsymbol{\xi}}_r \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}_r} \right)_{AA'} \right|^2 (n_{\mathbf{k},\alpha} + 1) \quad (3.44)$$

dove abbiamo reintrodotto c , definito $\hbar\omega_{\mathbf{k}} = E_{A'} - E_A$ e $d\Omega_{\mathbf{k}}$ è l'elemento di angolo solido attorno alla direzione \mathbf{k} del fotone finale.

Nel fattore $n_{\mathbf{k},\alpha} + 1$ il primo termine corrisponde all'emissione indotta. Imponendo che l'intensità $I(\omega)d\omega$ della radiazione incidente sia data dall'energia del numero $n_{\mathbf{k},\alpha}$ di fotoni nella cella di spazio delle fasi corrispondente si ottiene la relazione tra I e $n_{\mathbf{k},\alpha}$:

$$I(\omega) = \sum_{\alpha} \frac{\hbar n_{\mathbf{k},\alpha}}{2\pi^2} \left(\frac{\omega}{c} \right)^3 \quad (3.45)$$

D'altra parte il termine 1 nella (3.44) corrisponde all'emissione spontanea di fotoni e non può essere predetto dalla teoria semiclassica della radiazione, che corrisponde al limite $n_{\mathbf{k},\alpha} \gg 1$.

La relazione (3.41) fu applicata da Einstein all'equilibrio della radiazione em di frequenza ω con le pareti di un corpo nero alla temperatura T , per il quale esistessero due livelli $E_{A'}$ e E_A , con $E_{A'} - E_A = \hbar\omega$. L'argomento di Einstein è il seguente: se N_A e $N_{A'}$ sono le popolazioni atomiche dei due livelli, in condizioni stazionarie, ci sono tante transizioni di emissione quante di assorbimento e deve essere

$$N_A dw_a = N_{A'} dw_e \quad (3.46)$$

con $\frac{N_A}{N_{A'}} = e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}$ per la distribuzione di Boltzmann. Dalla (3.41) e dalla (3.46) e (3.45) segue allora

$$\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)^{-1} = < n_{\mathbf{k}} > = \frac{I(\omega)\pi^2}{\hbar \left(\frac{\omega}{c} \right)^3} \quad (3.47)$$

da cui si ottiene lo spettro di Planck per il corpo nero. Risulta anche che il numero medio $< n_{\mathbf{k}} >$ di fotoni nello stato \mathbf{k} segue la distribuzione di Bose con potenziale chimico $\mu = 0$, caratteristica questa della massa nulla del fotone.

3.5 Lo spettro di emissione spontanea. Vita media

Lo spettro di emissione (3.44) assume la forma più semplice nell'approssimazione di dipolo (3.43). Notiamo innanzitutto che gli elementi di matrice di \mathbf{D} sono collegati a quelli di $\dot{\mathbf{D}}$ dall'equazioni di moto nella forma di Heisenberg:

$$\left(\dot{\mathbf{D}} \right)_{AA'} = \frac{i}{\hbar} < A | [H_{at}, \mathbf{D}] | A' > = \frac{E_{A'} - E_A}{i\hbar} (\mathbf{D})_{AA'} \quad (3.48)$$

pertanto la (3.44) si può riscrivere per l'emissione spontanea

$$\frac{dw_e(A' \rightarrow A)}{d\Omega_{\mathbf{k}}} = \alpha \frac{\mathbf{k}^2}{2\pi} \omega_{\mathbf{k}} \left| \frac{1}{e} (\mathbf{D})_{AA'} \cdot \varepsilon_{\mathbf{k},\alpha} \right|^2 \quad (3.49)$$

e mostra alcune caratteristiche da notare:

◇1◇ Lo spettro è di ordine $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$, la costante di struttura fina, come ci si aspetta da un processo al primo ordine.

◇2◇ Lo spettro di potenza corrispondente è ottenuto moltiplicando la (3.49) per $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$, che è l'energia di ogni fotone, di modo che esso non dipende più da \hbar . Esso diventa dunque tipico dell'emissione di un dipolo “classico” $(\mathbf{D})_{AA'}$, il quale è però ottenuto direttamente dall'elemento di matrice atomico:

$$\frac{1}{e} (\mathbf{D})_{AA'} = \int dV \psi_A^*(\boldsymbol{\xi}_i) \sum_s \boldsymbol{\xi}_s \psi_{A'}(\boldsymbol{\xi}_i)$$

$$dV = \prod_r d^3 \zeta_r$$
(3.50)

ed è quindi una grandezza quantistica, in generale un vettore a componenti complesse.

◇3◇ Calcolato o dato $(\mathbf{D})_{AA'}$, lo spettro (3.49) ha una dipendenza angolare non banale per ogni polarizzazione $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k},\alpha}$. Di queste ne esistono due per ogni direzione di osservazione \mathbf{k} , con $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k},\alpha} = 0$, e sono scelte a seconda della situazione sperimentale. Se non si misura la polarizzazione del fotone, ma solo la sua intensità, allora il risultato (3.49) va sommato su entrambe le polarizzazioni $\alpha = 1, 2$ e si ricostruisce così la proiezione trasversa al vettore \mathbf{k} :

$$\sum_{\alpha=1,2} D^i D^{j*} \varepsilon_{i\mathbf{k},\alpha} \varepsilon_{j\mathbf{k},\alpha}^* = D^i D^{j*} (\delta_{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2}) = |\mathbf{D}_\perp|^2 = |\mathbf{D}|^2 - |\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{k}}|^2$$
(3.51)

da cui si ottiene

$$\frac{dw_e}{d\Omega_{\mathbf{k}}} = \alpha \frac{k^2}{2\pi} \omega_k \left| \frac{1}{e} \mathbf{D}_\perp \right|^2$$
(3.52)

◇4◇ Infine, la probabilità di transizione totale per unità di tempo si ottiene integrando sull'angolo solido $d\Omega_{\mathbf{k}}$. Dato che in media angolare $\langle k_i k_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij} k^2$ si ottiene la vita media

$$\frac{1}{\tau_e} = \int d\Omega_{\mathbf{k}} \frac{dw_e}{d\Omega_{\mathbf{k}}} = \frac{4}{3} \alpha k^2 \omega_k \left| \frac{1}{e} \mathbf{D}_\perp \right|^2$$
(3.53)

Dunque gli stati eccitati atomici diventano instabili per radiazione di fotoni. Per una tipica transizione del tipo $2p \rightarrow 1s$ dell'atomo di idrogeno si ha $\frac{D}{e} \sim a \sim \frac{1}{2} \text{\AA}$, $\omega \sim 10^{16} \text{ sec}^{-1}$, $ka \sim 3 \cdot 10^{-3}$ e quindi

$$\tau^{-1} \sim \alpha k^2 \omega \left| \frac{1}{e} D \right|^2 \sim 10^8 \text{ sec}^{-1}$$
(3.54)

È da notare che tutta la trattazione perturbativa data finora vale per tempi piccoli rispetto ai tempi dell'ordine di $\tau = 10^{-8} \text{ sec}$ per cui gli stati atomici diventano instabili. Ciò si applica in particolare al tempo di interazione \mathcal{T} , che deve essere molto lungo rispetto a ω_k^{-1} , ma anche corto rispetto a τ .

Notiamo infine che la distribuzione angolare della radiazione è in genere non banale anche nel caso non polarizzato (3.52), perché $(\mathbf{D})_{AA'}$ può essere un vettore complesso. Ad esempio, nel caso delle transizioni $2p \rightarrow 1s$ dell'idrogeno, ci sono tre stati $2p$ con proiezioni del momento

angolare $l_z = m = 0$ e $m = \pm 1$, dove l'asse di quantizzazione z è definito ad esempio da un campo magnetico che distingue i 3 livelli. Un semplice calcolo dà allora

$$(\mathbf{D})_{00} = A(0, 0, 1), \quad (\mathbf{D})_{0\pm 1} = \frac{A}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0) \quad (3.55)$$

dove

$$A = a_0 \frac{1}{3\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^+} dr r^4 e^{-\frac{3}{2}r} = \sqrt{2} \frac{2^7}{3^5} a_0 \simeq 0.7 \dot{A} \quad (3.56)$$

si vede che la transizione $0 \rightarrow 0$ corrisponde a un dipolo lineare lungo l'asse z e la distribuzione angolare è

$$\frac{dw_e}{d\Omega_{\mathbf{k}}} = \frac{3}{8\pi\tau} \sin^2 \theta \quad (3.57)$$

ove $\theta = \theta_{z,\mathbf{k}}$ è l'angolo della direzione di emissione con quella del dipolo. In tal caso la radiazione emessa è polarizzata linearmente nel piano z, \mathbf{k} e l'intensità è massima per la direzione di osservazione $\theta = \frac{\pi}{2}$, come succede per un'antenna rettilinea.

Invece le transizioni $\pm 1 \rightarrow 0$ corrispondono a un dipolo nel piano x, y rotante in senso orario (antiorario) rispettivamente. La distribuzione angolare si trova direttamente dalla (3.51) ed è

$$\frac{dw_e}{d\Omega_{\mathbf{k}}} = \frac{3}{16\pi\tau} (1 + \cos^2 \theta) \quad (3.58)$$

In tal caso la radiazione emessa è polarizzata ellitticamente, con semiassi dati da $\cos \theta$ nel piano z, \mathbf{k} e 1 perpendicolarmente ad esso. L'intensità della radiazione è questa volta massima lungo z , come succede per una corrente circolare nel piano xy .

3.6 Emissione di multipolo. Effetto Cerenkov

Abbiamo visto l'importanza del parametro ka , che nel caso delle perturbazioni atomiche è dell'ordine del permille, e permette l'uso dell'approssimazione di dipolo. In altri casi ka può non essere piccolo (per i nuclei può essere del per cento, e più), oppure l'elemento di matrice di dipolo è nullo per qualche regola di selezione (ad es. nelle transizioni $\Delta\ell = 0$, che conservano la parità). In tal caso gli esponenziali $e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}}$ nelle (3.37 3.38) vanno sviluppati in serie di potenze di ka e, al primo ordine non banale per cui $e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}} = 1 \pm i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}$, la (3.38) contiene il termine correttivo

$$h_{Q\mu} = e\epsilon^i k^j \sum_r \dot{\xi}_r^i \xi_r^j \quad (3.59)$$

oltre al termine di dipolo $h_D = \epsilon_i D_i$.

Le correzioni così ottenute sono dovute agli elementi di matrice di quadrupolo elettrico e di momento magnetico. Per vederlo basta decomporre il tensore $e \sum_r \dot{\xi}_r^i \xi_r^j$ nella parte simmetrica

(collegata ad un tensore di spin 2) e antisimmetrica (collegata ad un vettore assiale), come segue:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}^i \mathbf{k}^j [\frac{e}{2} (\dot{\boldsymbol{\xi}}_r^i \boldsymbol{\xi}_r^j + i \leftrightarrow j) + \frac{e}{2} (\dot{\boldsymbol{\xi}}_r^i \boldsymbol{\xi}_r^j - i \leftrightarrow j)] &= \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^i k^j \dot{Q}^{ij} + (\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\epsilon}) \cdot \boldsymbol{\mu} = h_{Q\mu}\end{aligned}$$

dove $Q^{ij} = e \sum_r (\xi_r^i \xi_r^j - \frac{1}{3} |\boldsymbol{\xi}_r|^2 \delta^{ij})$ é il quadrupolo elettrico e $\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2} \sum_r \boldsymbol{\xi}_r \wedge \dot{\boldsymbol{\xi}}_r$ é il momento magnetico degli elettroni atomici (la parte δ^{ij} non contribuisce per l'ortogonalitá $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k} = 0$). Entrambi i termini (3.60) sono di ordine ka rispetto a h_D , e il loro contributo é simile a quello della (3.49), con gli elementi di matrice di $h_{Q\mu u}$ al posto di quelli di h_D . Termini con multipoli di ordine superiore si ottengono dallo sviluppo di $e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}}$ a ordine $(ka)^2$ e oltre, ma non sono trattati qui.

Le considerazioni fatte sopra si applicano se il sistema ha dimensioni a prefissate (elettroni legati) e se il parametro ka é piccolo. La situazione é però diversa nell'ultravioletto (grandi k) oppure se il sistema ha dimensioni grandi o non prefissate, come del caso di elettroni liberi. Un caso curioso di questo genere é quello dell'effetto Cerenkov, che consiste nell'emissione di luce da parte di particelle cariche (come gli elettroni) quando si muovono in un dielettrico (acqua, aria) con velocitá superiore a quella della luce nel mezzo. In tal caso si vedrá che l'esponenziale $e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}}$ della funzione d'onda del fotone é fondamentale per la conservazione dell'impulso del processo e va considerato, ovviamente, a tutti gli ordini.

Chiediamoci innanzitutto se un elettrone di impulso \mathbf{k} e velocitá $\mathbf{v} = \frac{\partial E(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}$ possa emettere luce, cioé decadere in un elettrone di impulso \mathbf{p} a in un fotone di impulso $\hbar \mathbf{k}$. Nel processo si conservano sia l'impulso che l'energia, per cui $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \hbar \mathbf{k}$, e inoltre

$$E(\mathbf{p}) = E(\mathbf{p} - \hbar \mathbf{k}) + \hbar \omega_{\mathbf{k}} \simeq E(\mathbf{p}) - \hbar \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} + \hbar \omega_{\mathbf{k}} \quad (3.60)$$

per cui deve essere

$$\omega_{\mathbf{k}} \simeq \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \leq |\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{v}| \quad (3.61)$$

Se il processo avviene nel vuoto la regola di dispersione é $\omega_k = |\mathbf{k}|$ e quindi é impossibile soddisfare la (3.61), che richiederebbe $v > c = 1$, cioé una velocitá dell'elettrone superiore a quella della luce nel vuoto, in contraddizione con il principio di relativitá. É ben noto infatti che gli elettroni sono particelle stabili, e possono irraggiare nel vuoto solo se soggetti ad accelerazione, se sono cioé in interazione con altre cariche esterne che trasmettono loro energia ed impulso.

Se invece il processo avviene in un mezzo con indice di rifrazione $n > 1$, allora la regola di dispersione é $\omega_{\mathbf{k}} = \frac{|\mathbf{k}|}{n}$ e la (3.61) richiede $v > \frac{c}{n} = \frac{1}{n}$, cioé una velocitá superiore a quella della luce nel mezzo, cosa del tutto possibile per particelle molto energetiche. In tal caso la particella

carica di velocità \mathbf{v} irraggia ad un angolo θ con la direzione di \mathbf{v} tale che, per la (3.61), (cono di emissione Cerenkov)

$$\cos \theta = \frac{c}{nv} < 1. \quad (3.62)$$

Questo processo è alla base delle misure delle velocità di particelle molto energetiche (contatori Cerenkov).

L'effetto Cerenkov può essere descritto al primo ordine dall'interazione radiazione–materia (3.35), tenendo conto però di due peculiarità: innanzitutto il campo em nel mezzo con indice di rifrazione n dà un contributo dielettrico $\frac{\epsilon}{2}\mathbf{E}^2$ all'energia, con $\epsilon = n^2$. Di conseguenza lo sviluppo in modi propri di \mathbf{A} viene a dipendere da n , come segue:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k V}} \frac{1}{n} (\epsilon^{(\alpha)}(\mathbf{k}) a_\alpha(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_k t} + h.c.) \quad (3.63)$$

dove $\omega_k = \frac{|k|}{n}$ e $c = 1$. È facile verificare che la nuova normalizzazione (3.63) permette di scrivere la hamiltoniana em

$$\mathcal{H} = \int d^3x \frac{1}{2} \left(n^2 \dot{\mathbf{A}}^2 + rot^2(\mathbf{A}) \right) \quad (3.64)$$

nella maniera standard

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \hbar \omega_{\mathbf{k}} (a_k^{+(\alpha)} a_k^{(\alpha)}) \quad \left(\omega_{\mathbf{k}} = \frac{|\mathbf{k}|}{n} \right), \quad (3.65)$$

con $[a_\alpha(\mathbf{k}), a_{\alpha'}^+(\mathbf{k}')] = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$. Gli stati iniziali e finali del processo sono stati di elettrone libero, con funzione d'onda nel continuo

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{\hbar}} \quad \left(\mathbf{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}(n_1, n_2, n_3) \right) \quad (3.66)$$

ortonormali nel volume di quantizzazione V . Di conseguenza l'elemento di matrice di emissione (3.38) diventa

$$V_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = -\frac{e\sqrt{\hbar}}{n\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} V}} \epsilon_\alpha^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{v} \delta_{k, \frac{p'-p}{\hbar}}, \quad (3.67)$$

cioè proporzionale a $\frac{(2\pi)^3}{V} \delta\left(\frac{\mathbf{p}'-\mathbf{p}}{\hbar} - \mathbf{k}\right)$ nel limite di $V \rightarrow \infty$, e la probabilità di transizione differenziale diventa anch'essa proporzionale ad una delta di conservazione dell'energia. Infatti:

$$dw = \frac{2\pi e^2 \hbar}{V \hbar 2\omega_{\mathbf{k}} n^2} |\epsilon^* \cdot \mathbf{v}|^2 \delta(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}'} - \hbar\omega_{\mathbf{k}}) \frac{(2\pi)^3}{V} \delta^3\left(\frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p}}{\hbar} - \mathbf{k}\right) d\phi_f. \quad (3.68)$$

lo spazio finale delle fasi è dato da $d\phi_f = \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} V \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} V$: esso cancella la dipendenza dal volume di normalizzazione e fissa $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}$ e $\hbar\omega_{\mathbf{k}} = E - E' \simeq \hbar\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}$, secondo la (3.61). Integrando

su \mathbf{p}' e $\cos \theta$ con la funzione delta di conservazione resta una probabilità differenziale in $\omega = \frac{|k|}{n}$:

$$dw = \alpha \frac{d\omega}{v} \sum_{\epsilon} |\epsilon \cdot \mathbf{v}|^2 \Theta(nv - 1) = \quad (3.69)$$

$$\alpha d\omega \frac{v}{c} [1 - \left(\frac{c}{n(\omega)v} \right)^2] \Theta \left(v - \frac{c}{n(\omega)} \right),$$

dove nell'ultima riga si è usata la somma sulle polarizzazioni $\sim \sin^2 \theta$, e si è ripristinata c e la dipendenza dall'indice di rifrazione dalla frequenza. Lo spettro di frequenza (sostanzialmente nel visibile) è sostanzialmente uniforme, ma tagliato ad alte frequenze ($\omega \lesssim \omega_c$) perché $n(\omega)$ tende verso 1 e quindi raggiunge, alla frequenza di taglio, $n(\omega_c) = \frac{c}{v}$, cioè il valore minimo accettabile.

3.7 Diffusione della luce: scattering Thomson

Consideriamo ora il processo di diffusione di un fotone da un atomo

$$\mathbf{k}_1, \epsilon_1 + \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{k}_2, \epsilon_2 + \mathbf{A}' \quad (3.70)$$

in cui lo stato finale \mathbf{A}' può essere diverso da \mathbf{A} . Dato che viene assorbito il fotone iniziale ed emesso quello finale, l'ampiezza di transizione è di ordine e^2 . Ad essa contribuiscono, secondo la (3.34) sia il vertice $V^{(2)}$ al primo ordine perturbativo che quello $V^{(1)}$ al secondo ordine:

$$T_{fi}^{(2)} = \frac{e^2}{2m} \frac{2\epsilon_1 \cdot \epsilon_2^* \hbar}{\sqrt{2\omega_1 V 2\omega_2 V}} < A' | \sum_r e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \boldsymbol{\xi}_r} | A > + \sum_n \frac{< A' | V^{(1)} | n > < n | V^{(1)} | A >}{E_A + \hbar\omega_1 - E_n} \quad (3.71)$$

dove il fattore 2 nel primo termine deriva dal calcolo dell'elemento di matrice di \mathbf{A}^2 , in quanto uno qualsiasi degli \mathbf{A} può distruggere (creare) il fotone iniziale (finale).

L'espressione (3.71) è ricca di struttura, ma si semplifica drasticamente se l'energia del fotone $\hbar\omega_1 \gg \Delta E$ è molto più grande delle differenze di energia atomiche, sempre restando nel limite non relativistico ($\hbar\omega_1 \ll mc^2$). Ciò è dovuto alla soppressione causata dal denominatore di energia nel secondo termine della (3.71). Se inoltre si usa l'approssimazione di dipolo $e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}} \simeq 1$ l'elemento di matrice nel primo termine diventa semplicemente $\delta_{A'A}$ ed è possibile solo la diffusione elastica. Si ottiene quindi

$$T_{fi}^{(2)} \simeq \frac{e^2 \hbar}{2m\omega_1 V} \delta_{A'A} n_e \epsilon_1 \cdot \epsilon_2^* \quad (3.72)$$

dove n_e è il numero di elettroni atomici. In altre parole il fotone diffonde da ciascun elettrone come se fosse libero, e lo stato atomico non viene cambiato. L'ampiezza limite (3.72) prende il

nome da Thomson e viene di solito considerata come il limite universale di bassa energia della diffusione di cariche elementari (la condizione $\omega_1 \gg \Delta E$ permettendo di congelare la struttura atomica).

Osserviamo ora che la quantitá misurabile in un processo di diffusione non é la probabilitá di transizione, ma la sezione d'urto. Infatti nel processo di diffusione (3.70) lo stato iniziale é non normalizzabile, e corrisponde ad un flusso $\phi_i = \frac{1}{V}c = \frac{1}{V}$ di fotoni entranti che dipende dalla normalizzazione degli stati del continuo e viene quindi fattorizzato, definendo la sezione d'urto differenziale (per un solo elettrone)

$$d\sigma = \frac{dw_{fi}}{\phi_i} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\delta(\hbar(\omega_1 - \omega_2))}{\frac{1}{V}} \left| \frac{e^2 \hbar}{2m\omega_1 V} n_e \boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2^* \right|^2 \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} = \left| \frac{e^2}{4\pi mc^2} \boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2^* \right|^2 d\Omega_2 \quad (3.73)$$

Vediamo che la (3.73) é indipendente, come deve, dal volume di normalizzazione V . Notiamo anche che nella (3.73) interviene il raggio classico dell'elettrone $r_0 = \frac{e^2}{4\pi mc^2}$ e non interviene, invece, la costante di azione \hbar . Si tratta quindi di un risultato semiclassico la cui struttura é dovuta soprattutto alla geometria del prodotto scalare delle polarizzazioni $\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2^*$.

Per capire la distribuzione angolare della (3.73) consideriamo il caso in cui il fotone \mathbf{k}_1 incide lungo l'asse z , con polarizzazione lungo l'asse x , mentre quello uscente \mathbf{k}_2 ha anomalia θ e azimuth ϕ . Una base delle polarizzazioni finali é ad es.

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, -\sin \theta) \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = (\sin \phi, -\cos \phi, 0) \quad (3.74)$$

caratterizzate dall'essere nel piano di scattering zk_2 la prima e ortogonale ad esso la seconda, sempre con $\boldsymbol{\epsilon}_i \cdot \mathbf{k}_2 = 0$. Se non si osserva la polarizzazione finale si ha semplicemente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_x = r_0^2 (\cos^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \phi) \quad (3.75)$$

Per un fascio incidente polarizzato lungo y si avrebbe

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_y = r_0^2 (\sin^2 \phi \cos^2 \theta + \cos^2 \phi) \quad (3.76)$$

e, per uno non polarizzato

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}|_x + \frac{d\sigma}{d\Omega}|_y \right) = r_0^2 \frac{1}{2} (\cos^2 \theta + 1) \quad (3.77)$$

risultato che, in questo caso, non dipende da ϕ . É da notare che, nell'ultimo caso, si é usata una media incoerente. Da tutte le espressioni precedenti, integrando sull'angolo solido, si ottiene la sezione d'urto totale Thomson $\sigma = 8\pi r_0^2/3$, la quale é indipendente dalla polarizzazione incidente e piuttosto piccola, dato che r_0 é dell'ordine di 1 fermi.

Il fascio di fotoni incidente potrebbe essere anche parzialmente polarizzato con probabilità p lungo x e $(1 - p)$ lungo y . In tal caso si avrebbe

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(p \frac{d\sigma}{d\Omega}|_x + (1 - p) \frac{d\sigma}{d\Omega}|_y \right) \quad (3.78)$$

risultato che non è invariante per rotazioni attorno all'asse z , dipendendo da ϕ in modo non banale, nel caso $p \neq 1/2$. Questo mostra che, per specificare uno stato misto parzialmente polarizzato, bisogna precisare bene la base delle polarizzazioni che lo definisce.

3.8 Scattering Raman

Se l'energia del fotone $\hbar\omega_1$ è dell'ordine dell'energia tipica di transizione atomica ΔE , il secondo termine della (3.71) va tenuto in conto, anzi può essere molto più importante del primo. Notiamo allora che gli stati intermedi $|n\rangle$ possono coincidere con lo stato eccitato n dell'atomo, ma possono anche contenere uno stato atomico m e i due fotoni, quello finale e quello iniziale. Si ottengono quindi due termini o diagrammi, i quali differiscono perché nel primo viene assorbito prima il fotone iniziale ed emesso poi quello finale, e viceversa nel secondo. Si ha allora, in approssimazione di dipolo

$$\begin{aligned} T_{fi} &= \frac{\hbar}{2V\sqrt{\omega_1\omega_2}} \left[\frac{e^2}{m} \boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2^* n_e \delta_{AA'} + \frac{(\dot{\mathbf{D}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2^*)_{A'n} (\dot{\mathbf{D}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1)_{nA}}{\hbar(\omega_1 - \omega_{nA} + i\epsilon)} - \frac{(\dot{\mathbf{D}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1)_{A'm} (\dot{\mathbf{D}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2^*)_{mA}}{\hbar(\omega_1 + \omega_{mA} - i\epsilon)} \right] \\ &= \frac{\hbar}{V\sqrt{\omega_1\omega_2}} f_{A'A} \end{aligned} \quad (3.79)$$

dove $\hbar\omega_{na} = E_n - E_A$ e, corrispondentemente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \left| \frac{f_{A'A}}{4\pi} \right| \quad \omega_2 = \omega_1 + \omega_{AA'} \quad (3.81)$$

In questo caso, a causa del secondo termine della (3.79), è possibile anche diffusione anelastica $A' \neq A$ (scattering Raman).

L'ampiezza $f_{A'A}$, in parentesi quadra nella (3.79), ha le dimensioni di una lunghezza, e può essere messa in una forma più conveniente con l'uso di varie identità fra gli elementi di matrice (che non riportiamo qui) come segue:

$$f_{A'A} = \omega_1 \omega_2 \left[\frac{(\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2^*)_{A'n} (\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1)_{nA}}{\hbar(\omega_1 - \omega_{nA} + i\epsilon)} - \frac{(\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1)_{A'm} (\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2^*)_{mA}}{\hbar(\omega_1 + \omega_{mA} - i\epsilon)} \right] \quad (3.82)$$

dove è stata inglobata l'ampiezza Thomson e sono state fattorizzate le frequenze iniziale e finale. Quest'ultima forma è tipica del potenziale efficace di dipolo $V_{eff} = -\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$, e mostra

chiaramente la struttura delle risonanze quando $\omega_1 \sim \omega_{nA}$ per qualche n . Inoltre i fattori di frequenza si combinano a dare $\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \omega_1^4 \left(\frac{\alpha a^2}{\Delta\omega_{A'A}} \right)^2$ nel limite di bassa frequenza $\omega_1 \ll \Delta\omega_{A'A}$, se cioè ω_1 è più piccola della frequenza di transizione tipica. Questo spiega l'andamento di tipo ω^4 della diffusione a bassa frequenza.

Resta da analizzare la regione di risonanza, in cui ω_1 si avvicina ad una delle possibili frequenze di transizione. È da notare che la (3.82) ha, a rigore, una divergenza nel limite $\omega_1 = \omega_{nA}$ e cessa quindi di essere valida per $\omega_1 - \omega_{nA} \sim 1/\tau$ dove τ è la vita media dello stato n dovuto alla transizione $n \rightarrow A$. Questo significa che, in questo limite, gli ordini perturbativi superiori diventano importanti: si può infatti arguire che il denominatore di energia andrebbe corretto, da questi ordini superiori, sostituendo ϵ con la larghezza naturale $\gamma = 1/\tau$ dello stato. Quindi per $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_{nA} \sim \frac{1}{\tau}$ la sezione d'urto non polarizzata assume approssimativamente la forma di una risonanza alla Breit-Wigner

$$\sigma_{ris} = \frac{12\pi}{k_1^2} \frac{\gamma^2/4}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2/4} \quad (3.83)$$

ed ha un massimo $\sigma_{max} = 3\lambda_1^2/\pi$, di tipo geometrico, molto più grande dell' o.d.g. tipico $4\pi r_0^2$.

Capitolo 4

Condensazione di bosoni e superfluidità

Consideriamo ora una applicazione della teoria dei campi alla materia a bassa temperatura. In questo caso i campi con numero variabile di particelle da considerare sono quelli degli atomi o degli elettroni - rispettivamente bosoni o fermioni - in un regime di energie non relativistico. Si tratta dunque di particelle con massa, caratterizzate dall'equazione di Schroedinger ad una particella, con regola di dispersione $\omega_{\mathbf{k}} = \hbar k^2/2m$. Dato che la massa implica una grande energia di riposo mc^2 , un sistema statistico con un numero N di particelle non ha fenomeni importanti di fluttuazione del loro numero totale ad energie non relativistiche. Tuttavia, la teoria dei campi è utile per descrivere i fluidi bosonici (e fermionici) a temperature vicine allo zero assoluto. Nello stato fondamentale di tali sistemi gli stati quantistici di energia più bassa sono occupati da una buona frazione del totale delle particelle e il formalismo della teoria dei campi è in grado di trattare gli scostamenti dalla situazione di equilibrio e le fluttuazioni del numero di particelle eccitate.

Il fluido di Bose degenere è caratterizzato dal fenomeno della condensazione nello stato con $\mathbf{k} = 0$. Ricordiamo la distribuzione di Bose:

$$dN = \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}} - \mu}{K_B T}} - 1} \quad (k > 0) \quad (4.1)$$

in cui valori positivi di μ sono esclusi, perché la (4.1) avrebbe una singolarità non integrabile nello spazio \mathbf{k} . Allora il potenziale chimico $\mu \leq 0$ è determinato in funzione di $n = \frac{N}{V}$ e T dalla condizione di "normalizzazione"

$$N = \frac{V}{\lambda^3} f\left(\frac{\mu}{K_B T}\right) \quad , \quad \lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2\pi m K_B T}} \quad (4.2)$$

$$f(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{x^2 - \alpha} - 1} \leq \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \quad per \quad \alpha \leq 0.$$

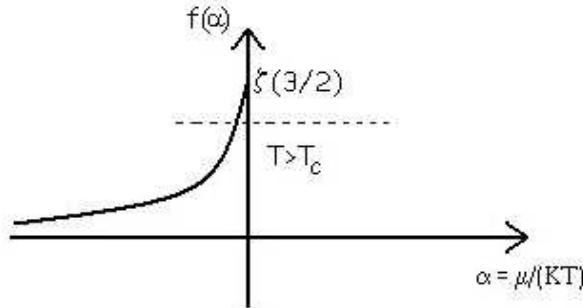


Figura 4.1:

Esiste dunque una temperatura critica per cui

$$n\lambda(T_c)^3 = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \quad :$$

- per $T > T_c$ si ha $\mu < 0$, determinato per basse densità come per il gas di Maxwell
- per $T = T_c \Rightarrow \mu = 0$ e $n = \zeta(\frac{3}{2})\lambda(T_c)^{-3} \sim T_c^{\frac{3}{2}}$
- per $T < T_c$, solo una frazione delle particelle $n(T) = \zeta(\frac{3}{2})\lambda(T)^{-3}$ si trovano negli stati con $k > 0$, mentre $n - n(T) = n_0$ si trovano nello stato fondamentale con $k = 0$.

Sotto la temperatura critica si forma dunque un *condensato*, con un numero macroscopico di particelle nello stesso stato quantico. In queste condizioni, il numero di particelle "in moto" può fluttuare in quanto il condensato funge da serbatoio e pertanto gli effetti di mescolamento di numero di particelle sono importanti. Per questo, conviene descrivere il sistema con un campo quantistico non relativistico.

4.1 Campo bosonico di Schroedinger

Consideriamo la quantizzazione degli stati a molti corpi di una particella di spin zero (ad esempio un atomo nel suo stato fondamentale) il cui moto segue l'equazione di Schrödinger. Dato che, nel limite classico, si ottengono stati di una particella e non un campo – il quale corrisponderebbe ad un'onda di De Broglie sovrapposizione coerente di stati a molte particelle – conviene partire direttamente dallo spazio di Fock degli stati a numero arbitrario di particelle. Sappiamo che gli stati ad una particella di funzione d'onda ψ sono descritti dalla sovrapposizione

$$|\psi\rangle = \sum_k \tilde{\psi}_k a_k^\dagger |0\rangle \quad (4.3)$$

di modo che $|\tilde{\psi}_k|^2$ dà la distribuzione di probabilità negli impulsi $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. È allora naturale definire il campo $\phi(\mathbf{x}, 0)$ in modo che

$$|\psi\rangle = \int d^3x \psi(\mathbf{x}) \phi^\dagger(\mathbf{x}, 0) |0\rangle \quad \text{dove} \quad \psi(\mathbf{x}) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\psi}_k \quad (4.4)$$

è la funzione d'onda nella rappresentazione delle coordinate. Identificando le (4.3) e (4.4) segue che

$$\phi^\dagger(\mathbf{x}, 0) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{V}} a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (4.5)$$

ha il significato di operatore di creazione "nel punto \mathbf{x} ".

Si noti che i casi fononico e fotonico esaminati in precedenza sono diversi, perché ci sono sia frequenze positive che negative, e la parte $u^{(-)}(\mathbf{x}, 0)$ del campo a frequenze negative non si può estrarre da u con un operatore locale: perciò u^- non ha l'interpretazione di creare particelle localmente. Invece, per il campo di Schroedinger si può definire un campo con solo frequenze positive

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{V}} a_k e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_k t)} \quad \omega_k = \frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m} \quad (4.6)$$

il quale soddisfa l'equazione di Schroedinger libera,

$$i\hbar \dot{\phi} = -\hbar^2 \frac{\nabla^2}{2m} \phi \quad (4.7)$$

e le regole di commutazione a tempi uguali con il campo *coniugato*

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.8)$$

tipiche di operatori di creazione e distruzione *locali*.

Esiste anche una lagrangiana

$$\mathcal{L} = i\hbar \phi^\dagger \dot{\phi} - \hbar^2 \frac{\nabla \phi^\dagger \nabla \phi}{2m} \quad (4.9)$$

le cui equazioni di Eulero-Lagrange danno la Eq.(4.7), ma che ha diverse peculiarità. Infatti, essa è del primo ordine in $\dot{\phi}$, con momento coniugato $\Pi = i\hbar\phi^\dagger$, e con hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \hbar^2 \frac{\nabla \phi^\dagger \nabla \phi}{2m} \quad (4.10)$$

Dunque, le regole di commutazione canoniche fra ϕ e Π , cioé $[\phi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{y}, t)] = i\hbar\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ diventano regole di commutazione fra ϕ e ϕ^\dagger e danno luogo precisamente alla Eq.(4.8).

La ragione di queste peculiarità sta nel fatto che ϕ è un campo complesso, il quale ingloba due variabili reali, cioè il campo vero e proprio e il suo momento coniugato. Si può infatti riscrivere ϕ in termini di parte reale ed immaginaria

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + \frac{i}{\hbar}\pi) \quad , \quad i\hbar\phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi + i\hbar\varphi) \quad (4.11)$$

e riformulare il problema in modo che appaia di secondo ordine nel tempo per il campo reale φ , il quale ha regole di commutazione canonica con π . La ridefinizione (4.11) non è poi sorprendente dato che, per le (4.6) richiama la relazione che esiste fra a_k e la coppia q_k, p_k in rappresentazione degli impulsi.

Notiamo infine che l'energia totale del sistema è data da

$$H = \int \mathcal{H} d^3x = \sum_k a_k^\dagger a_k \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \quad , \quad (4.12)$$

come ci si aspetta per un insieme di particelle di Schroedinger libere. Nel seguito introdurremo delle interazioni nella Hamiltoniana, in modo da dare un modello campistico della condensazione.

4.2 Modello di Landau del condensato con interazioni

Si vuole descrivere un gas di Bose a temperature vicino a $T = 0$ in cui da una parte si forma il condensato a $\mathbf{k} = 0$, e dall'altra le particelle non possono avvicinarsi troppo a causa dell'interazione repulsiva per volume finito degli atomi (gas di Bose quasi perfetto). Il modello di Landau contiene un termine di potenziale attrattivo a piccole densità e repulsivo a grandi densità, come segue

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\phi)^\dagger(\nabla\phi) - \mu\phi^\dagger\phi + \frac{1}{2}g(\phi^\dagger\phi)^2 \quad (4.13)$$

ove μ e g sono costanti positive. Si tratta di un modello fenomenologico, i cui parametri, al variare della temperatura attorno a quella critica di condensazione, descrivono la transizione di fase del sistema. In particolare il parametro μ (potenziale chimico) varia da $\mu < 0$ (fase ordinaria) a $\mu > 0$ per la fase condensata che vogliamo considerare.

Notiamo che il termine attrattivo, corrispondente ad una massa negativa (!) - o potenziale chimico positivo - favorisce grosse densità $|\phi|^2$ e sarà l'origine - vedremo - del condensato. Il

secondo termine, repulsivo, descrive invece gli effetti di volume finito delle particelle quando queste si urtano.

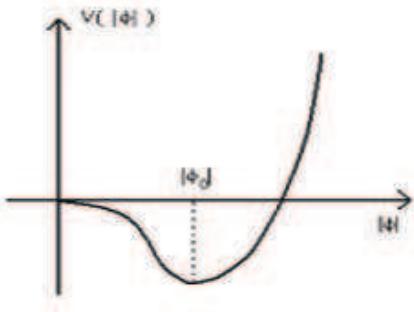


Figura 4.2:

Appare dalla forma del potenziale che $|\phi| = 0$ è un massimo instabile, mentre il minimo è a $|\phi_0| = \sqrt{\mu/g}$, per qualsiasi valore della fase di ϕ_0 . Si deve dunque cambiare tipo di sviluppo, definendo lo sviluppo “spostato”

$$\phi = \phi_0 + \tilde{\phi}(\mathbf{x}) \quad , \quad \tilde{\phi}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|>0} \frac{a_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{V}} \quad (4.14)$$

ove $\phi_0 = |\phi_0| e^{i\theta}$ è uno qualsiasi dei minimi degeneri.

Scegliere θ (ad es. $\theta = 0$) equivale a scegliere lo stato fondamentale dello sviluppo descritto dallo stato coerente

$$|\phi_0\rangle = N \exp\left(\sqrt{V}\phi_0 a_0^\dagger\right) |0\rangle \quad , \quad \left(|\phi_0|^2 = \frac{\mu}{g} = \frac{N_0}{V} = n_0\right), \quad (4.15)$$

ove a_0^\dagger è l'operatore di creazione nel modo $\mathbf{k} = 0$. D'altra parte, la Hamiltoniana (4.13) è *invariante* sotto trasformazioni di fase $\phi \rightarrow e^{i\theta}\phi$ con $\theta = \text{cost}$ (trasformazione globale), e quindi H_{eff} commuta con $N = \sum_{\mathbf{k}} a_k^\dagger a_k$, generatore di tali trasformazioni. Perciò lo stato fondamentale, in cui θ può variare di poco attorno ad un valore fissato, rompe la simmetria¹.

Scegliendo ϕ_0 reale e sviluppando in $\tilde{\phi}$ fino ai termini quadratici si ottiene la nuova forma della hamiltoniana

¹Si può mostrare che gli altri stati fondamentali degeneri rispetto a θ non possono essere generati dallo sviluppo attorno a ϕ_0 se lo spazio delle \mathbf{x} ha più di una dimensione, in particolare in tre dimensioni. Questo perché la transizione “tunnel” fra diversi θ è soppressa dalle dimensioni spaziali.

$$\mathcal{H}_{eff} = -\frac{\mu^2}{2g} + \hbar^2 \frac{\nabla \phi^\dagger \nabla \phi}{2m} + \frac{\mu}{2} (\tilde{\phi} + \tilde{\phi}^\dagger)^2 + o(\tilde{\phi}^3, \tilde{\phi}^4) \quad (4.16)$$

e, per integrazione su d^3x ,

$$H_{eff} = -\frac{\mu^2}{2g} V + \sum_{|k|>0} \left[\left(\mu + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \right) a_k^\dagger a_k + \frac{\mu}{2} (a_k a_{-\mathbf{k}} + a_\mathbf{k}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger) \right]. \quad (4.17)$$

Si noti che l'ultimo termine puó creare o distruggere coppie di particelle di impulso opposto. Quindi H_{eff} conserva l'impulso, ma non $\tilde{N} = \sum_{|k|>0} a_k^\dagger a_k$, e non ha piú esplicitamente l'invarianza per trasformazioni di fase della (4.13)².

La Hamiltoniana (4.17) non é piú diagonalizzata da a_k e $a_{-\mathbf{k}}^\dagger$, ma da una loro mescolanza, ottenuta con la trasformazione di Bogolubov:

$$A_k = \cosh \left(\frac{1}{2} \theta_k \right) a_k + \sinh \left(\frac{1}{2} \theta_k \right) a_{-\mathbf{k}}^\dagger \quad , \quad [A_k, A_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}. \quad (4.18)$$

Infatti, si puó scrivere esplicitamente

$$H_{eff} = E_0 + \sum_{|\mathbf{k}|>0} \epsilon(\hbar \mathbf{k}) A_k^\dagger A_k \quad (4.19)$$

purché si ponga

$$E_0 + \frac{\mu^2}{2g} V = - \sum_{|\mathbf{k}|>0} \epsilon(\hbar \mathbf{k}) \sinh^2 \frac{1}{2} \theta_k < 0, \quad (4.20)$$

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\left(\mu + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right)^2 - \mu^2} = \sqrt{\frac{\mu}{m} \mathbf{p}^2 + \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right)^2}, \quad (4.21)$$

$$tgh \theta_k = \mu / \left(\mu + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \right) \quad , \quad \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad . \quad (4.22)$$

Ne derivano alcune importanti conseguenze:

- 1) Il nuovo stato fondamentale é definito da

$$A_\mathbf{k} |\tilde{\phi}_0\rangle = 0 = (c_k a_k + s_k a_{-\mathbf{k}}^\dagger) |\tilde{\phi}_0\rangle \quad (4.23)$$

ed ha la forma

²Scegliendo un diverso minimo $\phi_0 = |\phi_0| e^{i\theta}$, la fase θ entrerebbe direttamente nella (4.17) e nelle espressioni che seguono. Cioé, solo il *complesso* delle hamiltoniane $H_{eff}(\theta)$ rispetterebbe la simmetria.

$$|\tilde{\phi}_0\rangle = \tilde{N} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{k}|>0} tgh\left(\frac{1}{2}\theta_k\right) a_k^\dagger a_{-k}^\dagger\right] |\phi_0\rangle \quad (4.24)$$

2) I nuovi modi propri, o eccitazioni elementari del sistema sono del tipo $A_k^\dagger |\tilde{\phi}_0\rangle$, con energia

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\mu}{m} \mathbf{p}^2 + \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)} \approx \begin{cases} v_c |\mathbf{p}| & \text{per } \mathbf{p} \rightarrow 0 \\ \mathbf{p}^2/(2m) & \text{per } \mathbf{p} \rightarrow \infty \end{cases} \quad (v_c = \sqrt{\frac{\mu}{m}}) \quad (4.25)$$

con $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$.

Quindi il nuovo condensato contiene anche coppie con $|\mathbf{p}| > 0$, di impulso opposto. Inoltre, lo spettro è *fononico* per $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$, e solo per grandi impulsi si riconnette con la nota dispersione di particelle libere. Lo spettro (a) che ne deriva è confrontato, in figura(4.3), con lo spettro fisico dell'elio (b), il quale presenta un minimo locale, dovuto ad altre interazioni attrattive di media distanza (rotoni), ed inoltre una curvatura negativa per $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$, importante per la stabilità dello spettro.

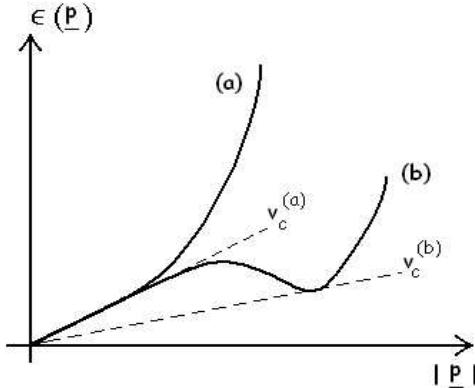


Figura 4.3:

4.3 Superfluidità e rottura di simmetria

La conseguenza fisica principale dello spettro di Landau ora discusso è quello della superfluidità: cioè, un corpo che si muove nel fluido con $v < v_c$ non presenta viscosità - cioè, non riesce a trasmettere energia al fluido stesso - perché l'emissione delle eccitazioni del sistema è proibita

dalla conservazione dell'energia e dell'impulso. Infatti, per tale corpo deve essere soddisfatta la relazione:

$$\frac{\mathbf{P}^2}{2M} - \frac{(\mathbf{P} - \hbar\mathbf{k})^2}{2M} \simeq \hbar\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \epsilon(\hbar\mathbf{k}) \quad (4.26)$$

e quindi deve essere $\epsilon(\hbar\mathbf{k}) < \hbar|\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{v}|$ per qualche $|\mathbf{k}|$, ove \mathbf{v} è la velocità del corpo.

Se dunque $|\mathbf{v}| < \text{Min}(\epsilon(\mathbf{p})/|\mathbf{p}|) \equiv v_c$, l'energia non si può conservare e la viscosità è zero.

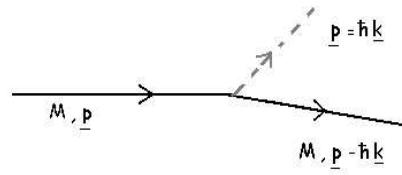


Figura 4.4:

Si vede dalla figura 4.3 che il fluido di Landau di tipo (a) ha $v_c^{(a)} = v_c = \sqrt{\mu/m}$, mentre $v_c^{(b)}$ è determinato dal minimo rotonico. Si avrebbe invece $v_c = 0$ per lo spettro $\epsilon(p) \sim \mathbf{p}^2/2m$, di tipo particella, da cui siamo partiti: il fluido di particelle (quasi) libere è viscoso per qualsiasi velocità. È dunque essenziale, per la superfluidità, la formazione del condensato che ha dato luogo al mescolamento di particelle e di coppie nella trasformazione di Bogolubov.

Il modello a *cappello messicano* del potenziale di Landau è comune a molti campi della fisica e connesso con il fenomeno della rottura spontanea della invarianza per trasformazione di fase già notata. Benché la Hamiltoniana di partenza sia invariante, la scelta della fase di ϕ_0 rompe la simmetria nella forma (4.17). In questi casi, in cui la simmetria è rotta dalla scelta dello stato fondamentale, si parla di *rottura spontanea* della simmetria. Resta tuttavia una traccia della degenerazione del minimo rispetto alla fase, dato dalla esistenza dei fononi $\epsilon(|\mathbf{p}|) \simeq v_c |\mathbf{p}|$ i quali corrispondono grosso modo alle oscillazioni di fase del campo.

Nel caso della magnetizzazione spontanea, la simmetria rotta è l'invarianza per rotazioni, e i fononi corrispondenti sono le onde di spin, o magnoni.

Nel caso della Cromodinamica quantistica, teoria relativistica delle interazioni nucleari forti, la simmetria rotta è la cosiddetta simmetria chirale, e i fononi corrispondenti sono particelle di massa nulla (i "bosoni di Goldstone") oppure piccola, come il pione di Yukawa nel caso della simmetria chirale.

Capitolo 5

Equazione di Dirac

La scoperta dell'equazione relativistica dell'elettrone é un esempio illustre di come, cercando la soluzione di un problema mal posto, si arrivi in realtà a risolvere un altro, più importante, con conseguenze non immaginate prima. Il problema iniziale é quello delle equazioni quantistiche, relativistiche, locali, a una particella, che generalizzino l'equazione non relativistica di Schroedinger. In realtà, si scopre poi, queste quattro condizioni sono fra loro incompatibili e la soluzione del problema porta a definire un campo di Dirac, a numero indefinito di particelle più coppie particella - antiparticella e non, come si voleva, una funzione d'onda ad una particella. E si scopre anche che la natura prevede una antiparticella di carica opposta per ogni particella, il positrone nel caso dell'elettrone.

Che le quattro condizioni dette sopra siano fra loro incompatibili si può capire sulla base del principio di indeterminazione. Per localizzare una particella – ad esempio un elettrone e^- – in uno spazio Δx bisogna fornire un impulso $\Delta p \gtrsim \hbar/\Delta x$ e una energia $\Delta E \simeq c\Delta p$. Ma se si vuole Δx arbitrariamente piccolo (equazione locale) allora ΔE diventa arbitrariamente grande: in particolare, per $\Delta x < \hbar/(2mc)$ si ha $\Delta E > 2mc^2$, e viene creata una coppia $e^- - e^+$; quindi, non é più una sola particella, ma una particella più un mare di coppie che possono essere localizzate, cioè un campo. Dunque relatività e località entrano in contraddizione con la meccanica quantistica a meno che non si parli di un campo di Dirac e non di una particella di Dirac.

Proviamo ad abbandonare la località: allora é facile costruire una equazione d'onda quantistica e relativistica, semplicemente ponendo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_\sigma = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \psi_\sigma \quad , \quad (\mathbf{p} = -i\hbar \nabla) \quad (5.1)$$

ove $\sigma = -s, \dots, +s$ per uno spin s . Questa equazione é a frequenze positive e relativistiche, ma non é locale perché la radice può essere solo definita come operatore integrale o, in altre parole,

contiene un numero infinito di derivate. Si può pensare di passare ad una equazione locale semplicemente quadrando la (5.1), e si ottiene

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0 \quad (5.2)$$

Questa è l'*equazione di Klein - Gordon*, corrispondente ad onde di plasma di velocità c e $\omega_0 = mc^2/\hbar$. Essa si può usare per un campo di spin zero, ma non per una funzione d'onda, in quanto contiene sia frequenze positive che negative, e inoltre non ammette una semplice interpretazione probabilistica perché la densità della sua corrente conservata non è definita positiva.

Dirac pensò di cercare una equazione del primo ordine nel tempo, cioè una “radice quadrata” della (5.2), che però fosse locale, cioè con un numero finito di derivate. Dato che questo è impossibile per una sola componente (vedi la (5.1)), si può cercare una soluzione con più componenti (lo spin!) e che sia lineare nel gradiente, ∇ , data la forma quadratica della (5.2). Cioé:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial t} = [mc^2 \beta + c\vec{\alpha} \cdot \mathbf{p}]_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'} = \hat{h}_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'} \quad (\mathbf{p} = -i\hbar \nabla) \quad (5.3)$$

ove α_i e β sono 4 matrici in uno spazio da determinare. La condizione che il quadrato dia la (5.2) si scrive, con $\hbar = c = 1$,

$$mp_i \{\alpha_i \beta_i\} + m^2 \beta^2 + p_i p_j \frac{1}{2} \{\alpha_i \alpha_j\} = m^2 + \mathbf{p}^2$$

da cui

$$\beta^2 = \alpha_i^2 = 1 \quad , \quad \{\alpha_i \alpha_j\} = 0 \quad (i \neq j) \quad , \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad (5.4)$$

Cioé, le 4 matrici β ed α_i hanno quadrato 1 e anticommutano con indici diversi.

La soluzione più semplice delle condizioni (5.4) si trova in uno spazio a 4 dimensioni, ponendo ad esempio

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

con una notazione di sottomatrici 2×2 ¹. La soluzione (5.5) non è l'unica possibile, e va sotto il nome di *rappresentazione di Dirac*: essa è particolarmente utile nel limite non relativistico,

¹Le 3 matrici σ_i di Pauli sono di quadrato 1 e anticommutano a indici diversi. Per aggiungere una quarta, anticommutante, bisogna raddoppiare lo spazio. Infatti, le matrici α e β hanno quadrato 1 e quindi autovalori 1 e -1 . Pero', dato che anticommutano, sono anche a traccia nulla, per cui devono avere dimensione pari.

mentre altre rappresentazioni si possono ottenere con una trasformazione di similitudine. Esiste una quinta matrice, $\gamma_5 = -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, che anticommuta con β e $\beta\alpha_i$ ed ha quadrato 1, la quale è collegata con la cosiddetta chiralità, importante nel limite di massa nulla.

Notiamo innanzitutto che la (5.3) ammette la corrente conservata $J^0 = \psi^\dagger\psi$, $J^i = \psi^\dagger\alpha_i\psi$, tale che $\partial_\mu J^\mu = 0$. Pertanto si potrebbe pensare ad una interpretazione probabilistica con J^0 densità di probabilità. Tuttavia, dato che $\hat{h}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 = E_p^2$, la Hamiltoniana \hat{h} ha autovalori $\pm E_p$, cioè sia positivi che negativi. Ci si potrebbe dunque fermare qui, in quanto l'equazione di Dirac non può definire - per questa ragione - una buona funzione d'onda localizzabile ad una particella.

Vedremo però che tutte le soluzioni - a energia positiva o negativa - ammettono interpretazione fisica come campi di spin 1/2 di particella o antiparticella. Per questa ragione, le componenti sono 4 e non 2. Inoltre, le soluzioni a energia positiva in campo Coulombiano danno un'ottima descrizione delle correzioni relativistiche all'atomo di idrogeno. Studieremo dunque sia le soluzioni dell'equazione libera, che rappresentano i modi propri del campo, sia il limite non relativistico delle soluzioni a energia positiva in campo elettromagnetico esterno, prima di passare alla interpretazione relativistica e quantistica del campo di Dirac.

5.1 Soluzioni dell'equazione libera

L'equazione libera di Dirac ammette soluzioni stazionarie della forma

$$\psi = e^{-iEt} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} ,$$

ove ϕ e χ sono spinori a due componenti che sono “grandi” e “piccoli” nel limite non relativistico, e soddisfano l'equazione

$$E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\phi + \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi \\ -m\chi + \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}\phi \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

con $E = \pm E_p$. Per le soluzioni a energia positiva $E = E_p$ conviene esprimere le piccole componenti come $\chi = (E_p + m)^{-1} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p} \phi$. Si ottiene dunque

$$u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \phi \end{pmatrix} \sqrt{E_p + m} \quad (5.7)$$

dove lo spinore a 4 componenti è normalizzato a $u^\dagger u = 2E_p$ se $\phi^\dagger \phi = 1$.

Lo spin di ψ può essere studiato dalla definizione di *momento angolare nel sistema di quiete*, cioè per $\mathbf{p} = 0$, e usando poi le trasformazioni di Lorentz, in quanto l'equazione di Dirac

é covariante (vedi seguito). Piú semplicemente, si puó notare che \hat{h} nella (5.6) commuta con l'operatore di elicitá, $\vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix}$, dove $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$. Quindi gli stati con proiezione $\pm \frac{1}{2}$ dello spin lungo l'impulso si ottengono semplicemente ponendo

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi_\lambda = \lambda \phi_\lambda \quad (\lambda = \pm 1) \quad (5.8)$$

e sono dati da $\psi_{\mathbf{p}\lambda}^{(+)} = e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E_{\mathbf{p}} t)} u_\lambda(\mathbf{p})$, con

$$u_\lambda(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} \phi_\lambda \\ \frac{|\mathbf{p}|\lambda}{E_p + m} \phi_\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda = \pm 1 \quad (5.9)$$

Si noti che $\chi_\lambda = O\left(\frac{v}{c}\right) \phi_\lambda$ per $|\mathbf{p}| \ll m$, mentre nel limite di massa nulla $\chi_\lambda = \lambda \phi_\lambda$ e quindi u_λ diventa autostato dell'operatore γ_5 , detto chiralitá:

$$\gamma_5 u_\lambda(\mathbf{p}) = \lambda u_\lambda(\mathbf{p}) \quad (m = 0) \quad (5.10)$$

Per le soluzioni ad energia negativa $E = -E_{\mathbf{p}}$, é conveniente esprimere ϕ in termini di χ , in quanto le componenti si scambiano di ruolo: $\phi = -(E_{\mathbf{p}} + m)^{-1} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi$. Inoltre conviene definire la soluzione di base $v_\lambda(\mathbf{p})$ con elicitá e impulso cambiati di segno, come per l'energia ², ponendo

$$\psi_{\mathbf{p}\lambda}^{(-)} = e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E_{\mathbf{p}} t)} v_\lambda(\mathbf{p}) \quad , \quad \sigma_{\mathbf{p}} v_\lambda(\mathbf{p}) = -\lambda v_\lambda(\mathbf{p}) \quad . \quad (5.11)$$

Si ottiene allora l'espressione

$$v_\lambda(\mathbf{p}) = \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi_\lambda \\ \chi_\lambda \end{pmatrix} = \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} -\frac{|\mathbf{p}|}{E_p + m} \lambda \chi_\lambda \\ \chi_\lambda \end{pmatrix} \quad , \quad (5.12)$$

con $\sigma_{\mathbf{p}} \chi_\lambda = -\lambda \chi_\lambda$. Nel limite di massa nulla viene dunque ad essere $\gamma_5 v_\lambda(\mathbf{p}) = -\lambda v_\lambda(\mathbf{p})$. Cioé, chiralitá ed elicitá sono equivalenti per un fermione di massa nulla (candidato, il *neutrino*), a parte il segno dell'energia.

5.2 Soluzioni in campo esterno. Limite non-relativistico

Un campo elettromagnetico esterno viene introdotto nelle equazioni di Dirac con la sostituzione minimale che, nel caso stazionario, corrisponde alla sostituzione

$$E \rightarrow E - eA^0 \quad , \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A} \equiv \vec{\pi} \quad (5.13)$$

²Gli stati con significato fisico sono quelli di antiparticella che, come vedremo, appaiono come "buchi" nel mare di stati ad energie negative ad hanno quindi, energia, impulso ed elicitá opposti.

L'equazione si scrive dunque nella forma

$$\begin{pmatrix} E \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m + eA^0)\phi + \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\chi \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\phi + (-m + eA^0)\chi \end{pmatrix} , \quad (5.14)$$

che studiamo per energie positive $E = m + \Delta$, con $\Delta \ll m$. Lo spinore χ puó essere eliminato scrivendo simbolicamente

$$(\Delta - eA^0)\phi = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\chi = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}(2m + \Delta - eA^0)^{-1}\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\phi \quad (5.15)$$

Questa equazione puó essere sviluppata in serie di potenze di $(\Delta - eA^0)/m \simeq v^2/c^2$. All'ordine piú basso il secondo membro si riduce a $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2/(2m)$, e quindi

$$\Delta\phi = \left[eA^0 + \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right] \phi , \quad (5.16)$$

dove si é usata l'identitá

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 = \sigma_i \sigma_j \pi_i \pi_j = \vec{\pi}^2 + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \frac{1}{2}[\pi_i, \pi_j]$$

con $[\pi_i, \pi_j] = [p_i - eA_i, p_j - eA_j] = ie(\partial_i A_j - \partial_j A_i)$.

Si nota dunque come la (5.16) contenga una interazione dello spin dell'elettrone con il campo magnetico esterno corrispondente al momento magnetico

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma} = \frac{e\hbar}{2mc} \cdot 2\mathbf{s} , \quad (5.17)$$

da cui segue che il fattore giromagnetico dell'elettrone é $g_e = 2$, una predizione importante dell'equazione di Dirac.

L'ordine successivo dello sviluppo della (5.15) é parecchio piú complicato, ma é comunque importante per la struttura fina dell'atomo di idrogeno ³. Si parte dall'approssimazione

$$(\Delta - eA^0)\phi \simeq \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \frac{1}{2m} \left(1 - \frac{\Delta - eA^0}{2m} \right) \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\phi \quad (5.18)$$

che si riscrive passando Δ a 1° membro:

$$\Delta \left(1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{(2m)^2} \right) \phi \simeq \left(\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + eA^0 + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} eA^0 \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{(2m)^2} \right) \phi \quad (5.19)$$

Successivamente si ridefinisce $\tilde{\phi} = \sqrt{1 + (\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m})^2}\phi$ e si ottiene $\Delta\tilde{\phi} = \tilde{h}\tilde{\phi}$, con

³Uno sviluppo sistematico richiede l'uso delle trasformazioni di Foldy - Wouthuisen. Qui ci limitiamo a definire una hamiltoniana efficace al secondo ordine.

$$\begin{aligned}\tilde{h} &= \left[1 + \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left(eA^0 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} e A^0 \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{(2m)^2} \right) \left[1 + \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.20) \\ &\simeq eA^0 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} - \frac{[(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2]^2}{8m^3} - \frac{1}{2} \left[\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m}, \left[\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m}, eA^0 \right] \right]\end{aligned}$$

ove si é approssimato $\left[1 + \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \right)^2$ raggruppando 4 termini dello sviluppo nel doppio commutatore.

Il terzo e quarto termine della (5.20) danno le interazioni di struttura fina, rispettivamente la correzione v^4/c^4 all'energia cinetica e l'interazione spin - orbita. Infatti, ponendo $\mathbf{A} = 0$ per il caso dell'idrogeno, si ottiene ⁴

$$\left[\frac{\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m}, \left[\frac{\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m}, eA^0 \right] \right] = \frac{e}{(2m)^2} [\vec{\sigma} \cdot \nabla, \vec{\sigma} \cdot \mathbf{E}] = \frac{e}{2m^2} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{E} \wedge \mathbf{p} + \frac{e}{4m^2} \operatorname{div} \mathbf{E} \quad (5.21)$$

e, infine

$$\tilde{h}_{s.o.} = \frac{e\hbar^2}{2mc^2} \frac{1}{2mr} \frac{\partial A^0}{\partial r} \vec{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \frac{e\hbar^2}{8m^2} \Delta A^0 \quad (5.22)$$

I termini di ordine v^4/c^4 nelle (5.20) e (5.22) contribuiscono alla struttura fina degli atomi idrogenoidi, cioé alle correzioni di ordine relativo $(Z\alpha)^2 \sim < v^2 > /c^2$ ai livelli. Il loro effetto viene valutato usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine. Il termine $-\frac{(\mathbf{p}^2)^2}{8m^3}$ é valutato usando la relazione fra $\frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ e il potenziale e dá la correzione $(E_n^{(0)} = -mc^2 \frac{(Z\alpha)^2}{2n^2})$

$$-\left\langle \frac{(\mathbf{p}^2)^2}{8m^3 c^2} \right\rangle_{nj\ell} = -|E_n^{(0)}| \frac{(Z\alpha)^2}{n} \left(\frac{1}{\ell + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) < 0 \quad (5.23)$$

che dipende da ℓ e non da j , ove gli autovalori di \mathbf{j}^2 , $\mathbf{s}^2 = \frac{3}{4}$, ℓ^2 e $j_z = m_J$ caratterizzano il livello imperturbato.

Il termine (5.22) di spin - orbita é valutato con il valor medio ($\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$)

$$\left\langle \frac{Z\mu_B^2}{4\pi r^3} \vec{\sigma} \cdot \vec{\ell} \right\rangle_{nj\ell} = |E_n^{(0)}| \frac{(Z\alpha)^2}{n} \left(\frac{1}{\ell + \frac{1}{2}} - \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right) \quad , \quad (\ell \neq 0) \quad (5.24)$$

per $\ell \neq 0$ e con

$$\frac{Ze^2\hbar^2}{8m^2} \left| \psi_{n\frac{1}{2}0}^{(0)} \right|^2 = |E_n^{(0)}| \frac{(Z\alpha)^2}{n} > 0 \quad , \quad (\ell = 0) \quad (5.25)$$

⁴ Attenzione al commutatore, contiene matrici σ e operatori differenziali

per $\ell = 0$, dove contribuisce la cosiddetta interazione di Darwin $\sim Ze\delta^3(\mathbf{x}) = -\Delta A^0$ nella (5.22). Sommando alla (5.23) la (5.24), oppure la (5.25), si ottiene il risultato complessivo ($\frac{1}{2} \leq j \leq n - \frac{1}{2}$)

$$\Delta E_{nj\ell} = |E_n^0| \frac{(Z\alpha)^2}{n} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right) < 0 \quad (5.26)$$

che é *indipendente* da ℓ , e dipende solo dal momento angolare totale j oltre che dal numero quantico principale n . Casi particolari della (5.24) sono

$$\Delta E \left(1s_{\frac{1}{2}} \right) = -|E_0| \frac{(Z\alpha)^2}{4} \quad (\text{parita } P = +),$$

$$\Delta E \left(2s_{\frac{1}{2}} \right) = \Delta E \left(2p_{\frac{1}{2}} \right) = -|E_1| \frac{5}{16} (Z\alpha)^2 \quad (P = \pm)$$

$$\Delta E \left(2p_{\frac{3}{2}} \right) = -|E_1| \frac{(Z\alpha)^2}{16} \quad (P = -).$$

Quindi c'è una degenerazione rispetto alla paritá dello stato per un dato j , in particolare fra i livelli $2s_{\frac{1}{2}}$ e $2p_{\frac{1}{2}}$ dell'atomo di idrogeno. Questi livelli in realtà non sono degeneri, ma separati in frequenza da $\Delta\omega = \Delta E_{\frac{1}{2}}/\hbar \simeq 10^3 \text{Mhz}$, come fu trovato sperimentalmente da Lamb (Lamb shift).

L'equazione di Dirac non é capace di spiegare da sola questo effetto. I livelli idrogenoidi sono solubili esattamente (Darwin) e danno il risultato

$$E_{nj} = mc^2 \left\{ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left[n + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - (Z\alpha)^2} - \left(j + \frac{1}{2} \right) \right]^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (5.27)$$

dipendente solo da n e j e non dalla paritá dello stato, che é un buon numero quantico della Equazione di Dirac⁵. Il Lamb shift é spiegato dalla Elettrodinamica quantistica, come effetto di ordine relativo $\sim (Z\alpha)^3 \log \frac{1}{\alpha}$, dovuto alle fluttuzioni di posizione dell'elettrone. Quindi le correzioni di ordine superiore nella (5.27) sono poco significative.

⁵La paritá determina il momento angolare ℓ delle componenti grandi, che puó assumere solo i valori $\ell = j \pm 1/2$ per dato j (eccetto il valore massimo $j = n - 1/2$ per cui $\ell = n - 1$).

5.3 Covarianza Relativistica

Per capire la covarianza della (5.3) conviene riscriverla in forma piú simmetrica fra tempo e spazio, tramite il vettore $\partial/\partial x^\mu$. Introduciamo le 4 “matrici gamma”

$$\gamma^0 = \beta \quad , \quad \gamma^i = \beta \alpha^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix} = -(\gamma^i)^\dagger$$

con le regole di anticommutazione

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

e riscriviamo la (5.3), con $\hbar = c = 1$, nella forma

$$i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi(x) = m\psi(x) \quad (5.28)$$

dove si nota a destra uno scalare (la massa) e a sinistra una specie di prodotto scalare con le matrici γ .

La (5.28) é covariante nel senso che, per ogni trasformazione di Lorentz $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$, si puó trovare una matrice $S(\Lambda)$ tale che

$$\psi'_\alpha(x') = S_{\alpha\beta}(\Lambda)\psi_\beta(x) \quad , \quad (x' = \Lambda x) \quad , \quad (5.29)$$

é soluzione della equazione primata se ψ é soluzione di quella non primata.

Dato che $\frac{\partial}{\partial x^\rho} = \Lambda_\rho^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu}$, é sufficiente che le γ^μ trasformino in maniera vettoriale, cioè

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu \quad (5.30)$$

perché il primo membro della (5.28) sia davvero un prodotto scalare e quindi la covarianza sia dimostrata. La forma della S , che non dimostriamo qui, é

$$S = \exp \left(-\frac{i}{2} \sum_{\mu < \nu} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right) = \exp \left(-\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right) \quad , \quad (5.31)$$

con $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, e in particolare

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^{23} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^{31} = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^{12} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \\ \sigma^{0j} = i\alpha_j = i\gamma_5 \sigma_j \quad \left[\sigma_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix} \right] \end{array} \right. \quad (5.32)$$

Gli ω nella (5.31) sono i parametri delle trasformazioni di Lorentz, ad es. $\omega_{12} = \theta$ per una rotazione nel piano 12, $\omega_{01} = \eta = \operatorname{arcth}(v/c)$ per una trasformazione di Lorentz pura lungo 1. Dunque la (5.31) mostra che i generatori delle rotazioni sono dati da $\mathbf{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}$ (come ci si poteva aspettare), mentre i generatori delle trasformazioni di Lorentz pure sono $\mathbf{K} = (i/2)\vec{\sigma}\gamma_5$, con l'importante differenza che i primi sono hermitiani e i secondi sono antihermitiani. Dunque S non è unitaria nel caso delle trasformazioni di Lorentz, ma soddisfa in ogni caso

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1} \quad (5.33)$$

Una importante conseguenza delle (5.31) e (5.33) è che $\psi' \rightarrow S\psi$ implica

$$\bar{\psi}'_\alpha(x') = (\psi^\dagger(x'))_\beta (\gamma^0)_{\beta\alpha} = (\bar{\psi}(x))_\beta (S^{-1})_{\beta\alpha} \quad (5.34)$$

e quindi S diventa unitaria nella metrica $(\bar{\psi})$, che non è definita positiva. Si ottiene di qui la regola per costruire scalari e vettori con le ψ . Infatti $\bar{\psi}\psi$ è uno scalare, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ (la corrente conservata) è un vettore, $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi$ è un tensore del secondo ordine. Anche $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ è uno scalare di Lorentz, ma cambia segno per parità spaziale. Questo perché $\psi_p(\mathbf{x}, x_0) = \gamma^0\psi(-\mathbf{x}, x_0)$ è la giusta trasformazione per l'inversione spaziale, e γ^0 anticommuta con γ_5 .

Si può anche scrivere una equazione di Dirac coniugata. Usando la notazione abbreviata

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \psi = (i\cancel{\partial} - m)\psi = 0 \quad (5.35)$$

e le proprietà di coniugazione

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \quad , \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \quad (5.36)$$

si ottiene facilmente

$$\bar{\psi}(-i\cancel{\partial} - m) = 0 \quad (5.37)$$

Allora per soluzioni ad energia positiva $\psi^{(+)} = e^{-ip\cdot x}u$ si ha

$$(\cancel{\partial} - m)\psi^{(+)} = \bar{\psi}^{(+)}(\cancel{\partial} - m) = 0 \quad (5.38)$$

e per quelle ad energia negativa $\psi^{(-)} = e^{ip\cdot x}v$

$$(\cancel{\partial} + m)\psi^{(-)} = \bar{\psi}^{(-)}(\cancel{\partial} + m) = 0 \quad (5.39)$$

Le proprietà di ortonormalità nella metrica $\bar{\psi}$ si riscrivono

$$\bar{u}_\lambda u_{\lambda'} = 2m\delta_{\lambda\lambda'} \quad , \quad \bar{v}_\lambda v_{\lambda'} = -2m\delta_{\lambda\lambda'} \quad , \quad \bar{u}_\lambda v_{\lambda'} = 0 \quad (5.40)$$

e quelle di completezza

$$\sum_\lambda u_\alpha^\lambda \bar{u}_\beta^\lambda = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \quad , \quad \sum_\lambda v_\alpha^\lambda \bar{v}_\beta^\lambda = (\not{p} - m)_{\alpha\beta} \quad (5.41)$$

I secondi membri della (5.41) sono anche i proiettori sulle energie positive e negative dell'equazione.

5.4 Il campo di Dirac. Sviluppo in modi propri

L'equazione di Dirac a una sola particella incontra grosse difficoltà quando le interazioni (ad es. $eA^0 \gtrsim 2mc^2$) sono forti ($eA^0 \gtrsim 2mc^2$) e possono causare transizioni agli stati ad energia negativa. Esempi di queste difficoltà sono il paradosso di Klein per la trasmissione da un gradino di potenziale molto repulsivo e la “zitterbewegung”, cioè oscillazioni di velocità da $-c$ a $+c$, dovuti a interferenze fra energie positive e negative in un pacchetto localizzato.

Si tratta dunque di reinterpretare l'equazione di Dirac come teoria del campo quantistico $\psi(\mathbf{x}, t)$. Esso può essere sviluppato in modi propri, come segue

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{p}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} \left(a_{\mathbf{p}, \lambda} u_\lambda(\mathbf{p}) e^{-iE_p t} + b_{-\mathbf{p}, \lambda}^\dagger v_\lambda(-\mathbf{p}) e^{iE_p t} \right) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = \\ &= \sum_{\mathbf{p}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} \left(a_{\mathbf{p}, \lambda} u_\lambda(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger v_\lambda(\mathbf{p}) e^{ipx} \right) \end{aligned} \quad (5.42)$$

dove la prima espressione è conveniente per le relazioni di ortonormalità nella metrica (\dagger) :

$$u_\lambda^\dagger u_{\lambda'} = 2E_p \delta_{\lambda\lambda'} \quad , \quad v_\lambda^\dagger v_{\lambda'} = 2E_p \delta_{\lambda\lambda'} \quad , \quad u_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) v_{\lambda'}(-\mathbf{p}) = 0 \quad (5.43)$$

mentre la seconda conviene per la metrica $(-)$:

$$\bar{u}_\lambda u_{\lambda'} = 2m\delta_{\lambda\lambda'} = -\bar{v}_\lambda v_{\lambda'} \quad , \quad \bar{u}_\lambda(\mathbf{p}) v_{\lambda'}(\mathbf{p}) = 0 \quad (5.44)$$

La equazione di Dirac deriva dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \dot{\psi} - \psi^\dagger \hat{h} \psi \quad , \quad \left(\hat{h} = \beta m - i\nabla \cdot \vec{a} \right) \quad (5.45)$$

che é del primo ordine, come per il campo di Schroedinger⁶. I momenti coniugati sono

$$\Pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = i\psi_\alpha^\dagger$$

e la Hamiltoniana

$$H = \int \mathcal{H} d^3x \quad , \quad \mathcal{H} = \Pi_\alpha \dot{\psi}_\alpha - \mathcal{L} = \psi^\dagger \hat{h} \psi \quad (5.46)$$

Il valore di $\hat{h}\psi$ si trova facilmente dalla prima forma (5.42), dove \hat{h} moltiplica per E_p ($-E_p$) i due termini della somma, cambiando il segno relativo. L'integrale (5.46) é fatto usando l'ortogonalitá delle onde piane e l'ortonormalitá (5.43) degli spinori. Infine si ottiene

$$H = \sum_{\mathbf{p}, \lambda} E_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger a_{\mathbf{p}, \lambda} - b_{\mathbf{p}, \lambda} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger \right) \quad (5.47)$$

Se le variabili complesse a e b sono considerate classiche, la (5.47) non é definita positiva, e lo stesso succede se $a_{\mathbf{p}, \lambda}$ e $b_{\mathbf{p}, \lambda}$ sono promossi ad operatori con le normali regole di commutazione. Le cose possono cambiare solo se, cambiando l'ordine di b e b^\dagger si ha un *cambiamento di segno*, cioé, regole di *anticommutazione*:

$$-b_{\mathbf{p}, \lambda} b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger = -1 + b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger b_{\mathbf{p}, \lambda}$$

In tal caso, se si definisce lo stato di vuoto come quello annullato da $a_{\mathbf{p}, \lambda}$ e $b_{\mathbf{p}, \lambda}$

$$a_{\mathbf{p}, \lambda} |0\rangle = b_{\mathbf{p}, \lambda} |0\rangle = 0 \quad (5.48)$$

si puó riscrivere la H come

$$H = E_0 + \sum_{\mathbf{p}, \lambda} E_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger a_{\mathbf{p}, \lambda} + b_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger b_{\mathbf{p}, \lambda} \right) \quad , \quad E_0 = - \sum_{\mathbf{p}, \lambda} E_{\mathbf{p}} \quad (5.49)$$

dove il termine operatoriale annulla il vuoto, ma é peraltro definito positivo.

5.5 Quantizzazione di Fermi. Spin e statistica, antiparticelle

Postuliamo dunque le regole di anticommutazione

⁶Anche in questo caso si tratta di un campo complesso, che assomma in sé le variabili reali di campo e di momento coniugato, la cui separazione si potrebbe ottenere con un formalismo di secondo ordine nel tempo.

$$\{a_{p,\lambda}, a_{p',\lambda'}\} = \{b_{p,\lambda}, b_{p',\lambda'}\} = 0 \quad (5.50)$$

$$\{a_{p,\lambda}, a_{p',\lambda'}^\dagger\} = \{b_{p,\lambda}, b_{p',\lambda'}^\dagger\} = \delta_{pp'}\delta_{\lambda\lambda'}$$

le quali danno allo spazio di Fock costruito sul vuoto (5.50) delle caratteristiche particolari :

- I numeri di occupazione di tipo $a^\dagger a$ hanno autovalore 0 e 1. Infatti soddisfano, per la (5.50), $(a^\dagger a)^2 = (a^\dagger a)$; ma è comunque chiaro che, essendo $(a_{p\lambda}^\dagger)^2 = (b_{p\lambda}^\dagger)^2 = 0$, non si possono costruire stati con più di una particella nello stesso modo.

- Gli stati soddisfano il principio di Pauli, cioè sono antisimmetrici per scambio degli indici di stato. Infatti, l'identità

$$|p_1\lambda_1, p_2\lambda_2\rangle = a_{p_1\lambda_1}^\dagger a_{p_2\lambda_2}^\dagger |0\rangle = -a_{p_2\lambda_2}^\dagger a_{p_1\lambda_1}^\dagger |0\rangle = -|p_2\lambda_2, p_1\lambda_1\rangle \quad (5.51)$$

è una conseguenza diretta delle regole di anticommutazione. Si trova dunque una giustificazione diretta del fatto che gli elettroni sono fermioni. Questa è una conseguenza importante di località, meccanica quantistica e relatività che va sotto il nome di *teorema di relazione fra "spin e statistica"*. Cioé le particelle di spin intero (0, 1, 2, ...) soddisfano la statistica di Bose-Einstein e quelle di spin semidispari ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$) la statistica di Fermi-Dirac.

- L'energia H è *definita positiva* dopo sottrazione dell'energia di zero, che è infinitamente negativa. Questa proprietà, che ha motivato le regole di anticommutazione, può essere interpretata dicendo che l'energia di zero è quella di un "mare di Fermi" che riempie completamente gli stati di energia negativa. I "buchi" in questo mare sono creati da $b_{p\lambda}^\dagger$ e sono allora i *positroni*, i quali mostrano energia, impulso, elicità e - vedremo - anche carica opposta allo stato di partenza.

- La descrizione della carica elettrica si ottiene reinterpretando la corrente di probabilità dell'equazione di Dirac,

$$J^\mu = (\psi^\dagger \psi, \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi) \quad , \quad \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (5.52)$$

come corrente di carica. Infatti la "carica totale"

$$Q = e \int d^3x \psi^\dagger \psi = e \sum_{\mathbf{p},\lambda} \left(a_{p\lambda}^\dagger a_{p\lambda} + b_{p\lambda}^\dagger b_{p\lambda} \right) \quad (5.53)$$

può essere riscritta, usando le r.d.a. (5.50), come

$$Q - Q_0 = e \sum_{\mathbf{p},\lambda} \left(a_{p\lambda}^\dagger a_{p\lambda} - b_{p\lambda}^\dagger b_{p\lambda} \right) \quad (5.54)$$

ove Q_0 - la carica del “mare” di stati a energia negativa - viene sottratta. Quindi la nuova “carica”, a secondo membro delle (5.54) ha autovalore e (incluso il segno negativo) sugli elettroni (con numero $a_{p\lambda}^\dagger a_{p\lambda}$), e autovalore $(-e)$ sui positroni (con numero $b_{p\lambda}^\dagger b_{p\lambda}$) e risulta *non* definita di segno.

- Dalle proprietà della carica, si vede che il campo complesso ψ , quantizzato con regole di anticommutazione, descrive sia particelle di spin 1/2 (elettroni) che antiparticelle con ugual massa e carica opposta (positroni); questa è allora la ragione fisica del raddoppio del numero di componenti (da 2 a 4). La simmetria fra particelle e antiparticelle è messa formalmente in evidenza dalla trasformazione di coniugazione di carica $\psi_c = C\psi^*$, ove $C = C^{*-1}$ è una opportuna matrice, dipendente dalla rappresentazione, tale che $C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^\mu$. In rappresentazione di Dirac si può scegliere $C = i\gamma^2$ e $\chi_\lambda = i\sigma_2\phi_\lambda^*$, per cui si ha $v_{p\lambda} = Cu_{p\lambda}^*$. Questa trasformazione lascia invariata l'equazione di Dirac libera, ma cambia il segno del suo accoppiamento con un campo e.m. esterno A^μ . Quindi ψ_c ha l'interpretazione di campo del positrone, di carica opposta all'elettrone, e differisce da ψ solo per lo scambio delle a con le b , con le stesse conseguenze fisiche.

In conclusione, la richiesta che l'energia sia positiva ha messo in evidenza la differenza sostanziale fra campi di spin zero (di Klein-Gordon) e spin 1 (fotone) e quelli di spin $\frac{1}{2}$ (elettrone e positrone). Questi ultimi, avendo regole di anticommutazione, sono fermioni (stati antisimmetrici per scambio), mentre i primi sono bosoni (simmetrici per scambio). Parallelamente, la presenza di cariche di segno opposto ha messo in evidenza l'esistenza delle antiparticelle.

Un ruolo importante nella nostra descrizione ha giocato il “mare di Fermi” degli stati a energia negativa. In realtà, la prima applicazione di questo concetto è proprio il gas di Fermi degenere vicino alla zero assoluto, caso in cui si sa che gli stati \mathbf{p} con $\frac{\mathbf{p}^2}{2m} < \varepsilon_F = \frac{\mathbf{p}_F^2}{2m}$ sono pieni a causa del principio di esclusione di Pauli. Questa è una situazione non relativistica, in cui il campo dell'elettrone può essere sviluppato nella forma

$$\psi_\sigma(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{p}, s} \frac{1}{\sqrt{V}} a_{\mathbf{p}, s} \chi_\sigma^{(s)} \exp \left[i \left(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} t \right) \right] \quad (5.55)$$

ferme restando però le regole di anticommutazione⁷

$$\{a_{ps}, a_{p's'}\} = 0 \quad , \quad \{a_{ps}, a_{p's'}^\dagger\} = \delta_{pp'}\delta_{ss'} \quad (5.56)$$

Si nota ora come il vuoto, definito da $a_{ps}|0\rangle = 0$, non è una buona descrizione del gas degenere, in cui gli stati con $p \leq p_F$ sono pieni. Chiamato $|F\rangle$ tale stato, si avrebbe invece

⁷Queste regole hanno giustificazione solo a livello relativistico (come visto prima), in cui intervengono anche gli stati ad energia negativa (positroni) che qui non sono considerati.

$$a_{ps}|F\rangle = 0 \quad (p > p_F) \quad , \quad a_{ps}^\dagger|F\rangle = 0 \quad (p \leq p_F) \quad (5.57)$$

È allora conveniente ridefinire $a_{ps}^\dagger = b_{-p-s}$ ($p \leq p_F$), cioè reinterpretare i creatori di elettroni come distruttori di “buchi”, analogamente a quanto fatto per il campo di Dirac. Lo sviluppo del campo diventa

$$\psi = \sum_{\mathbf{p}, s}^{p_F} \frac{1}{\sqrt{V}} b_{\mathbf{p}, s}^\dagger \chi^{(s)} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} t)} + \sum_{p > p_F, s} \frac{1}{\sqrt{V}} a_{\mathbf{p}, s} \chi^{(s)} e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} t)}, \quad (5.58)$$

e quello dell’energia

$$H = \sum \frac{\mathbf{p}^2}{2m} a_{ps}^\dagger a_{ps} = E_F - \sum_{p \leq p_F} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} b_{ps}^\dagger b_{ps} + \sum_{p > p_F} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} a_{ps}^\dagger a_{ps} \quad (5.59)$$

ove E_F è l’energia dello stato fondamentale $|F\rangle$, il quale soddisfa

$$a_{ps}|F\rangle = 0 \quad (p > p_F) \quad ; \quad b_{ps}|F\rangle = 0 \quad (p \leq p_F) \quad . \quad (5.60)$$

Questo formalismo ha applicazioni per lo studio delle proprietà del gas di Fermi degenere. Ricordare comunque che i “buchi” in questo caso nulla hanno a che fare con i positroni!

5.6 Equazione e campo di Weil

Il limite di massa nulla dell’equazione di Dirac è di particolare interesse perché mette in evidenza la simmetria chirale, importante per la teoria elettrodebole e per il neutrino. Infatti, in questo limite, la (5.3) si riduce alla equazione ($\alpha_i = \gamma_5 \sigma_i$)

$$i\dot{\psi} = \gamma_5 \vec{\sigma}(-i\vec{\nabla})\psi \quad (5.61)$$

la cui hamiltoniana commuta con γ_5 e può quindi essere classificata secondo i suoi autovalori $\chi = \pm$:

$$i\dot{\psi}_\pm = \pm \vec{\sigma}(-i\vec{\nabla})\psi \quad (5.62)$$

Ciascuna delle equazioni di Weil (5.62) può descrivere un campo, il quale però non ha parità definita, in quanto γ^0 , che anticommuta con γ_5 , fa passare da una chiralità all’altra. È facile vedere che le soluzioni libere della (5.61) hanno elicità λ , segno dell’energia ϵ e chiralità χ collegate dalla relazione $\lambda = \epsilon\chi$, come già notato prima, nel limite di massa nulla, per le soluzioni libere della (5.3). Pertanto, un campo di Weil di chiralità χ contiene una particella di elicità χ e una antiparticella di elicità $-\chi$. In particolare, il neutrino (di massa nulla) delle

correnti deboli di tipo Vettoriale meno Assiale (dette $V - A$)- che violano massimamente la parità - ha $\lambda = \chi = -1$, mentre l'antineutrino ha $\lambda = +1$. Si ha dunque lo sviluppo

$$\psi_\nu(\mathbf{x}, t) = \psi_- = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}V}} (a_{\mathbf{p}-} u_-(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}+}^\dagger v_+(\mathbf{p}) e^{ipx}) \quad (5.63)$$

Si noti che questo campo ha solo due componenti indipendenti, essendo stata congelata l'elicità; inoltre $u_-(\mathbf{p})$ e $v_+(\mathbf{p})$ differiscono solo per un fattore di fase, dipendente dalle convenzioni di fase per gli spinori ϕ_- e χ_+ . Si vede dunque che la possibile esistenza del neutrino di Weil a due componenti si basa sul fatto che, per massa nulla, elicità e chiralità sono invarianti per trasformazioni di Lorentz proprie, anche se non per parità. In realtà, l'attuale evidenza sperimentale per le oscillazioni dei neutrini indicano l'esistenza di una piccola massa, e quindi un mescolamento con la chiralità opposta. Infine, un'ulteriore possibile particella neutra di spin 1/2 e con massa è il neutrino di Majorana, caratterizzato dall'essere autoconiugato, cioè con antiparticella uguale alla particella, come per il fotone.

5.7 Argomentazione di Bethe per il Lamb Shift

Il Lamb shift deriva dalla trattazione della interazione radiazione-materia agli ordini superiori in α , in cui l'elettrone interagisce con i fotoni virtuali, i quali sono emessi e riassorbiti in un tempo finito. La trattazione completa del problema richiede la Elettrodinamica quantistica, secondo la quale sia fotoni che anche elettroni sono trattati come campi. Tuttavia, l'origine fisica dell'effetto può essere capita con la discussione seguente.

Si suppone in primo luogo che la correzione ai livelli dovuti alla interazione con il campo elettromagnetico provenga da fluttuazioni nella posizione $\mathbf{x}(t)$ dell'elettrone sotto l'azione del campo elettrico dei fotoni quantizzati. Queste fluttuazioni hanno media lineare nulla, ma media quadratica non nulla, causando la dispersione della carica e su un raggio $\langle \delta \mathbf{x}^2 \rangle \simeq \alpha (\hbar/mc)^2$. L'elettrone acquista dunque un raggio finito, con conseguente modifica del potenziale coulombiano e dei livelli atomici.

Per calcolare le fluttuazioni di posizione, si parte dalla equazione $\delta \ddot{\mathbf{x}} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_{qu}$ e, passando alla trasformata di Fourier si ottiene:

$$\langle \delta \tilde{\mathbf{x}}^2(\omega) \rangle = \frac{e^2}{m^2 \omega^4} \langle \mathbf{E}_{qu}^2 \rangle = \frac{4\pi\alpha\hbar c}{m^2 \omega^4} \frac{\hbar\omega}{V} \quad (5.64)$$

dove si è supposto che l'energia media dei fotoni virtuali sia $\hbar\omega/V$ per ogni modo del campo e.m. Sommando poi su tutti i modi \mathbf{k}, ω si ottiene:

$$\langle \delta \mathbf{x}^2 \rangle = \frac{4\pi\alpha\hbar c}{m^2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \omega^3} = \frac{2}{\pi} \alpha \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \log \frac{m}{\lambda} \quad (5.65)$$

cioè, il raggio quadratico di cui si parlava all'inizio. Ne segue la modifica al potenziale Coulombiano

$$\langle \delta V \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \partial x_i \partial x_j \right\rangle = \frac{1}{6} \Delta V \langle (\delta \mathbf{x})^2 \rangle , \quad (5.66)$$

che è proporzionale a una funzione delta nell'origine, e infine lo spostamento dei livelli in onda s ($\ell = 0$) :

$$\delta E_{n0} = \frac{2\pi\alpha Z}{3} \langle (\delta \mathbf{x})^2 \rangle |\psi(0)|^2 = |E_{n0}| \frac{8Z^2\alpha^3}{3\pi n} \log \frac{1}{\alpha} \quad (5.67)$$

($\lambda \simeq m\alpha$ perchè il raggio di Bohr $a_0 = \frac{\hbar}{mc}\frac{1}{\alpha}$ taglia le lunghezze d'onda infrarosse nella integrazione su ω). Il risultato finale è ragionevolmente accurato e la trattazione completa serve a trattare le divergenze ultraviolette e a fissare meglio la parte finita della integrazione logaritmica sulla variabile ω .